



# Transport et production dans les écoulements turbulents de paroi à des nombres de Reynolds modérés

Frederic Bauer

## ► To cite this version:

Frederic Bauer. Transport et production dans les écoulements turbulents de paroi à des nombres de Reynolds modérés. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAI033 . tel-01216228

**HAL Id: tel-01216228**

**<https://theses.hal.science/tel-01216228>**

Submitted on 15 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : Mécanique des fluides, Procédés énergétiques

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Frédéric BAUER**

Thèse dirigée par **Sedat TARDU** et  
codirigée par **Olivier DOCHE**

préparée au sein du **Laboratoire des Ecoulements  
Géophysiques et Industriels**  
dans l'**École Doctorale IMEP2**

# Transport et production dans les écoulements turbulents de paroi à des nombres de Reynolds modérés

Thèse soutenue publiquement le **21 mai 2015**,  
devant le jury composé de :

**M. Pierre SAGAUT**

Professeur à l'Institut Universitaire de France, Président du jury

**M. Christophe CORRE**

Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, Rapporteur

**M. Eric LAMBALLAIS**

Professeur à l'Université de Poitiers, Rapporteur

**M. Nicolas MORDANT**

Professeur à l'Université Joseph Fourier, Examineur

**M. Sedat TARDU**

Maître de conférences à l'Université Joseph Fourier, Directeur de thèse

**M. Olivier DOCHE**

Maître de conférences à Grenoble-INP, Co-directeur de thèse





---

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes rapporteurs, Christophe Corre et Éric Lamballais, pour le temps et l'attention qu'ils ont consacrés à la relecture de ce manuscrit de thèse. Je remercie également Éric Lamballais pour avoir gentiment accepté de répondre à mes questions concernant le code Incompact3D. Je voudrais également remercier Pierre Sagaut (qui a fait le déplacement depuis Marseille) et Nicolas Mordant pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury de cette thèse.

Je voudrais ensuite exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Sedat Tardu, pour ses nombreux conseils et sa disponibilité tout au long de cette thèse en dépit de son emploi du temps souvent extrêmement chargé. J'ai également été heureux de travailler sous la co-direction d'Olivier Doche avec qui j'avais déjà travaillé en stage et dont j'ai apprécié les qualités d'écoute et qui m'a aidé à relativiser certains enjeux (participation à des conférences, rédaction d'articles).

Je tiens à remercier Didier Jacquin qui a travaillé à mes côtés en tant que stagiaire sur le développement du code DNS (implémentation d'un écoulement à bulles) et qui est devenu tout au long de son stage un ami. Merci à lui pour sa relecture attentive de la partie numérique de cette thèse.

Mes remerciements vont également à toutes les personnes ou institutions avec qui j'ai collaboré durant ma thèse et plus particulièrement à l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) pour leur confiance et les nombreuses heures de calcul mises à notre disposition. L'équipe de l'IDRIS s'est montrée particulièrement compétente et a grandement facilité le portage du code DNS sur la machine de calcul TURING. Je remercie également les membres du service informatique du LEGI, Cyrille Bonamy, Gabriel Moreau et Olivier de Marchi, qui m'ont aidé à résoudre rapidement les soucis techniques et m'ont ainsi permis de me concentrer sur mon travail de thèse.

Je tiens également à remercier le personnel administratif qui a dû composer avec mes lacunes criantes dans ce domaine.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mon entourage pour son soutien et ses



---

conseils. Merci plus particulièrement à ma petite amie, Anne-Sophie, qui est restée à mes côtés pendant les moments les plus difficiles et qui a su surmonter son aversion pour les mathématiques pour relire une partie de ce manuscrit, à Moloch qui m'a fait profiter de son expertise mathématique, à Momo pour la réalisation de certaines figures ainsi qu'à Diane pour la relecture de certains passages de cette thèse.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>V</b>
<b>Table des figures</b>	<b>XI</b>
<b>Table des notations</b>	<b>XIX</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
 <b>I Approches numériques adaptées à la simulation d'écoulements turbulents</b>	 <b>5</b>
<b>1 Stratégies de parallélisation</b>	<b>7</b>
1 Introduction . . . . .	7
2 Définitions . . . . .	7
3 Objectifs . . . . .	9
4 Choix du paradigme de parallélisation . . . . .	9
4.1 Description des différents types de parallélisme . . . . .	9
4.2 Décomposition du domaine . . . . .	11
4.2.1 Décomposition 3D . . . . .	11
4.2.2 Décomposition 2D . . . . .	13
 <b>2 Étude comparative des schémas de calcul à haute précision</b>	 <b>15</b>
1 Introduction . . . . .	15
2 Définition mathématique des schémas de calcul . . . . .	16
2.1 Formulation générale . . . . .	16
2.2 Dérivation par développement de Taylor . . . . .	18
2.3 À propos de la précision . . . . .	19
2.4 Construction des ensembles de points . . . . .	19
3 Principaux schémas de calcul . . . . .	20

3.1	Schémas explicites standards . . . . .	21
3.2	Schémas compacts . . . . .	21
3.2.1	Schémas compacts classiques . . . . .	22
3.2.2	Schémas de type combiné . . . . .	24
3.2.3	Résolution matricielle . . . . .	26
3.3	Schémas optimisés . . . . .	28
4	Estimation de la qualité d'un schéma . . . . .	30
4.1	Précision et nombre d'onde modifié . . . . .	30
4.2	Influence de la discrétisation spatiale sur la physique . . . . .	32
4.3	Stabilité et respect de la relation de dispersion . . . . .	34
4.3.1	Solution analytique et solution numérique . . . . .	35
4.3.2	Stabilité . . . . .	36
4.3.3	Respect de la relation de dispersion . . . . .	36
5	Problématiques liées à l'utilisation de schémas à haute précision . . . . .	38
5.1	Amortissement des oscillations factices . . . . .	38
5.1.1	Origine des oscillations factices . . . . .	39
5.1.2	Formulation des termes non-linéaires : utilisation de la forme skew-symmetric . . . . .	41
5.1.3	Utilisation de schémas décentrés . . . . .	44
5.1.4	Application d'un filtre . . . . .	50
5.1.5	Utilisation de schémas sur-dissipatifs . . . . .	52
5.2	Parallélisme à mémoire distribuée et schémas compacts . . . . .	55
5.2.1	Élargissement du sous-domaine . . . . .	56
5.2.2	Extrapolation des dérivées manquantes . . . . .	58
6	Approches utilisées . . . . .	61

## II Développement et optimisation du code de simulation 63

<b>3</b>	<b>Présentation générale du code</b>	<b>65</b>
1	Équations gouvernant la physique . . . . .	65
2	Description du domaine de calcul . . . . .	66
2.1	Vue d'ensemble . . . . .	67
2.2	Géométrie du maillage . . . . .	67
2.2.1	Transformation d'Orlandi . . . . .	68
2.2.2	Transformation de Laizet . . . . .	69
2.2.3	Calcul des dérivées . . . . .	71

2.3	Arrangement des variables . . . . .	72
3	Résolution numérique . . . . .	73
3.1	Calcul des termes d'advection et de convection . . . . .	74
3.1.1	Approche explicite pure . . . . .	75
3.1.2	Approche semi-implicite . . . . .	75
3.1.3	Conclusions . . . . .	77
3.2	Contrainte d'incompressibilité . . . . .	78
3.3	Contrainte de conservation du débit . . . . .	80
3.4	Implémentation . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Utilisation de schémas à haute précision : validation et perfor-</b>	
	<b>mances du code</b>	<b>83</b>
1	Introduction . . . . .	83
2	Schémas utilisés . . . . .	84
3	Analyse spectrale . . . . .	85
3.1	Précision des schémas . . . . .	85
3.2	Stabilité et qualités DRP . . . . .	85
3.3	Conclusion . . . . .	89
4	Application à l'étude d'un écoulement turbulent . . . . .	91
4.1	Réduction du repliement . . . . .	92
4.2	Étude comparative des statistiques de l'écoulement . . . . .	95
4.2.1	Grille moyenne . . . . .	95
4.2.2	Grille grossière . . . . .	96
5	Performance du code . . . . .	99
5.1	Description de la machine de calcul TURING . . . . .	99
5.2	Performances parallèles . . . . .	101
5.3	Profilage du code . . . . .	102
6	Conclusions . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Généralisation du code numérique</b>	<b>107</b>
1	Introduction . . . . .	107
2	Implémentation d'une approche spectrale générique . . . . .	108
2.1	Approche spectrale classique . . . . .	108
2.2	Approche spectrale étendue aux directions non-homogènes . . . . .	109
2.3	Extension à une direction non uniforme . . . . .	111
3	Transport d'un scalaire passif . . . . .	113
3.1	Équation de la température et adimensionnalisations . . . . .	113

3.2	Résultats de simulations . . . . .	114
4	Écoulement autour d'un corps immergé . . . . .	115
4.1	Conditions aux limites en entrée et en sortie du domaine . . .	115
4.1.1	Condition d'entrée . . . . .	116
4.1.2	Condition de sortie . . . . .	117
4.1.3	Influence des conditions d'entrée/sortie sur l'intérieur du domaine . . . . .	119
4.2	Prise en compte du corps immergé . . . . .	120
4.2.1	Choix de la méthode . . . . .	120
4.2.2	Approche FI implémentée . . . . .	122
4.2.3	Intégration à la méthode du pas fractionné . . . . .	123
4.3	Application à un écoulement autour d'un corps chauffant . . .	124
5	Conclusions . . . . .	125

### **III Simulation et étude statistique d'écoulements à nombres de Reynolds modérés 129**

<b>6</b>	<b>Mise en contexte de la turbulence pariétale 131</b>
1	Introduction . . . . . 131
2	Description générale . . . . . 132
2.1	Equation de Reynolds moyennée et contrainte totale . . . . . 132
2.2	Transport des contraintes de Reynolds . . . . . 133
2.3	Modèle en couches et échelles internes et externes . . . . . 136
2.4	Quelques nombres de Reynolds utiles . . . . . 137
2.5	Nombre de Reynolds et sensibilité aux échelles internes/externes . . . . . 139
3	Lois de vitesse moyenne . . . . . 140
4	Structures cohérentes . . . . . 142
4.1	Les grandes familles de structures . . . . . 144
4.2	Paquets de structures . . . . . 146
4.3	Modélisation des structures cohérentes . . . . . 149
<b>7</b>	<b>Effets du nombre de Reynolds sur le champ de vitesse 157</b>
1	Introduction . . . . . 157
2	Conduite des simulations . . . . . 158
2.1	Simulations effectuées . . . . . 158

2.2	Étapes de transition et d'acquisition . . . . .	159
3	Vitesse moyenne . . . . .	161
3.1	Profil global . . . . .	161
3.2	Vitesse moyenne dans la couche de recouvrement . . . . .	161
4	Intensités turbulentes . . . . .	166
5	Contrainte de Reynolds $-\overline{u'v'}$ . . . . .	169
6	Structure fine . . . . .	172
7	Analyse spectrale . . . . .	173
8	Transport des contraintes de Reynolds . . . . .	178
8.1	Transport dans la couche interne . . . . .	178
8.2	Transport dans la couche de recouvrement . . . . .	186
8.3	Sur l'estimation expérimentale de la dissipation . . . . .	186
9	Signature et caractérisation des structures tourbillonnaires dans la sous-couche tampon . . . . .	193
10	Conclusions . . . . .	201
<b>8</b>	<b>Etude statistique de la vorticité</b>	<b>205</b>
1	Introduction . . . . .	205
2	Considérations générales . . . . .	205
3	Intensités turbulentes . . . . .	207
4	Transport de $\overline{\omega'_i \omega'_i}$ . . . . .	212
5	Analyse spectrale . . . . .	217
6	Conclusions . . . . .	221
<b>9</b>	<b>Influence des événements extrêmes sur la production</b>	<b>223</b>
1	Introduction . . . . .	223
2	Présentation rapide des statistiques de Palm . . . . .	225
2.1	Distribution de Palm . . . . .	226
2.2	Valeur moyenne biaisée et non biaisée . . . . .	227
3	Fréquence des passages par le niveau $l$ . . . . .	228
4	Statistiques de Palm de la production . . . . .	230
4.1	Hypothèse de normalité conjointe . . . . .	231
4.2	Statistiques de Palm unidirectionnelles . . . . .	234
4.3	Statistiques biaisées et non biaisées . . . . .	237
4.4	Production dans la couche interne . . . . .	238
4.4.1	Effet des balayages et des éjections sur les statis- tiques de Palm . . . . .	238

4.4.2	Dépendance du niveau $l$ avec le nombre de Reynolds	240
4.4.3	Comparaison avec le cas gaussien . . . . .	244
5	Conclusions . . . . .	248
<b>Conclusion générale</b>		<b>251</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>255</b>
A	Article paru dans la revue <i>Computers and Fluids</i>	265
B	Article paru dans la revue <i>Journal of Turbulence</i>	285
C	Article à paraître dans la revue <i>European Journal of Mechanics</i>	313

# Table des figures

1.1	Exemple de courbes d'accélération et d'efficacité d'un code parallèle en fonction du nombre de processus . . . . .	8
1.2	Décomposition 1D, 2D et 3D du domaine de calcul . . . . .	12
2.1	Vue des ensembles de points d'un schéma . . . . .	17
2.2	Représentation des ensembles de points dans le cas d'un schéma de type « collocated » . . . . .	20
2.3	Représentation des ensembles de points dans le cas d'un schéma de type « staggered » . . . . .	21
2.4	Profil de $k^{(1)}/k$ en fonction du paramètre $kh$ . . . . .	32
2.5	Facteur d'amplification dans le plan $(kh - \omega\Delta t)$ dans le cas où l'avancement temporel est effectué avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 combiné à un schéma de différence finie centrée d'ordre 2 . . . .	37
2.6	Iso-courbes de la vitesse de groupe dans le plan $(kh - \omega\Delta t)$ dans le cas où l'avancement temporel est effectué avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 combiné à un schéma de différence finie centrée d'ordre 2 . .	38
2.7	Nombre d'onde effectif du produit de deux harmoniques en fonction du nombre d'onde réel . . . . .	40
2.8	Nombre d'onde modifié $k^\diamond$ associé à différentes formes de discrétisation	43
2.9	Densité spectrale du champ de vitesse pour les formes skew-symmetric, conservative et non-conservative des termes de convection . . . . .	44
2.10	Profils du terme dissipatif ajouté par l'utilisation de schémas décentrés	47
2.11	Profils du nombre d'onde modifié pour différents schémas décentrés .	49
2.12	Vitesse de groupe normalisée $V_g/c$ pour différents schémas décentrés combinés avec un avancement temporel selon le schéma d'Euler explicite d'ordre 1 . . . . .	50
2.13	Profils de la fonction de transfert pour des filtres d'ordre et de valeur $\alpha$ différents . . . . .	53



2.14	Profil de $k^{(2)}/k^2$ pour la dérivée seconde pour : le schéma standard explicite d'ordre 2, le schéma de Padé d'ordre 6 et le schéma combiné d'ordre 6 . . . . .	54
2.15	Amplitude des modes de Fourier pour le produit $q = u \frac{\partial \omega}{\partial x}$ au temps $t = 305$ . . . . .	55
2.16	Vue d'ensemble des processus, du sous-domaine et du sous-domaine élargi qui leur sont affectés . . . . .	57
2.17	Influence de la taille du sous-domaine élargi sur la qualité de la solution numérique, d'après [29] . . . . .	58
2.18	Profils du nombre d'onde modifié en différents point du sous-domaine	60
3.1	Vue d'ensemble du domaine de calcul . . . . .	67
3.2	Évolution du maillage physique en fonction du paramètre $a$ pour la transformation d'Orlandi . . . . .	69
3.3	Évolution du maillage physique en fonction du paramètre $\beta$ pour la transformation de Laizet . . . . .	70
3.4	Évolution de la taille des mailles en fonction de $s$ pour la méthode d'Orlandi avec $a=3.8$ et $N_y = 129$ et pour la transformation de Laizet avec $\beta=0.21$ et $N_y = 217$ . . . . .	71
3.5	Position des variables dans un maille de l'espace uniforme et une maille de l'espace physique . . . . .	73
3.6	Positionnement des termes de l'équation de Navier-Stokes dans le cas de la composante longitudinale $u$ de la vitesse. Les schémas de calcul utilisés pour chaque terme sont également indiqués. . . . .	82
4.1	Vue des différents sites où les termes de l'équation de Navier-Stokes sont calculés dans une maille 3D . . . . .	84
4.2	Précision des schémas D0s, D1s, D1c et D2c de la configuration explicite optimisée . . . . .	86
4.3	Précision des schémas D0s, D1s, D1c et D2c de la configuration compacte . . . . .	87
4.4	Facteur d'amplification des schémas D1s de la configuration explicite optimisée combiné avec le schéma d'avancement temporel d'Adam-Bashforth d'ordre 2 et le schémas de Runge-Kutta d'ordre 3 . . . . .	89
4.5	Vitesse de groupe des schémas D1s combinés avec le schéma d'avancement temporel d'Adam-Bashforth d'ordre 2 et le schémas de Runge-Kutta d'ordre 3 . . . . .	90

4.6	Fonction de transfert du filtre explicite optimisé et nombre d'onde modifié normalisé du schéma de dérivée seconde sur-dissipatif . . . . .	94
4.7	Spectres prémultipliés dans les direction $x$ et $z$ de la composante $u$ de la vitesse . . . . .	94
4.8	Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse et de pression sur la grille moyenne $129 \times 129 \times 129$ pour les configurations O2, EXPOPT et CPT comparées avec les résultats de [36] . . . . .	97
4.9	Moyenne quadratique des fluctuations de vorticité sur la grille moyenne $129 \times 129 \times 129$ pour les configurations O2, EXPOPT et CPT comparées avec les résultats de [36] . . . . .	98
4.10	Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse et de pression sur la grille grossière $129 \times 65 \times 65$ pour les configurations O2, EXPOPT, EXPOPT-AL et CPT comparées avec les résultats obtenus par la configuration CPT sur la grille G1 . . . . .	100
4.11	Accélération et efficacité du code mesurées sur TURING . . . . .	102
5.1	Profil de température moyenne exprimé dans les échelles internes . . .	115
5.2	Moyenne quadratique des fluctuations de température exprimée dans les échelles internes . . . . .	116
5.3	écart type de la pression pour les différents cas testés en fonction de la distance $y$ aux parois . . . . .	120
5.4	évolution de la vitesse longitudinale (moyennée en temps et dans la direction $z$ ) selon la direction de l'écoulement en $y/h = 0.1, 0.2$ et $1$ .	121
5.5	Vitesse $u$ résiduelle à l'intérieur du corps immergé . . . . .	125
5.6	Lignes de courant pour $Re = 20$ et $Re = 40$ . . . . .	126
5.7	Lignes de température pour $Re = 20$ et $Re = 40$ . . . . .	127
6.1	Interactions entre les différentes contraintes de Reynolds . . . . .	136
6.2	Echelles externes et nombre de Reynolds associé dans le cas d'un écoulement de couche limite, en canal ou en conduite cylindrique . . .	139
6.3	Profils log-log de la vitesse moyenne dans une conduite circulaire de rayon $R$ � $Re = 32 \times 10^3, 99 \times 10^3, 409 \times 10^3, 1.79 \times 10^6, 7.71 \times 10^6$ et $29.9 \times 10^6$ . . . . .	143
6.4	Exemples de structures cohérentes tirés de Robison [64] . . . . .	145
6.5	Vue conceptuelle du mécanisme de génération des stries par les TQL tirée de Tardu [67] . . . . .	146

6.6	Champ des fluctuations de vitesse à l'intérieur d'un paquet de structures obtenu par VIP dans un écoulement de couche limite à $Re_\theta = 930$ . La figure est tirée d'Adrian et al. [3]. . . . .	147
6.7	Représentation 3D des paquets et des bulles de vitesse déficitaire associée tirée de Adrian et al. [3] . . . . .	149
6.8	Exemples de fonctions $I_{ij}$ envisageables . . . . .	152
6.9	Illustration du concept de hiérarchie proposée par Perry et al. [73] . . . . .	154
6.10	Profils de la contrainte $\overline{u'^2}/u_\tau^2$ à $Re_\tau = 628000$ , $Re_\tau = 98190$ , $Re_\tau = 68780$ et $Re_\tau = 18010$ . . . . .	155
7.1	Profils de vitesse moyenne exprimée dans les échelles internes . . . . .	161
7.2	Profils de la fonction de diagnostic de la vitesse moyenne avec la loi logarithmique $F_{log} = y^+ \frac{dU^+}{dy^+}$ . . . . .	162
7.3	Profils de la fonction de diagnostic $F_{log+8} = (y^+ + 8) \frac{dU^+}{dy^+}$ de la vitesse moyenne avec la loi logarithmique décalée proposée par Wosnik et al. [58] . . . . .	164
7.4	Profils de la fonction de diagnostic $F_{pow} = \frac{y^+}{U^+} \frac{dU^+}{dy^+}$ de la vitesse moyenne avec une loi de puissance . . . . .	165
7.5	Écarts des fonctions de diagnostic $F_{log}$ et $F_{pow}$ par rapport à leurs valeurs en $y^+ = 80$ . . . . .	166
7.6	Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse pour $Re_\tau = 180$ , 395, 590 et 1100 . . . . .	168
7.7	Valeurs maximales de $\overline{u'^+2}$ obtenues dans nos simulations et celles de Hoyas et al. [38] comparées avec la relation logarithmique proposée par Panton [75] . . . . .	169
7.8	Profils de la contrainte totale et de la contrainte de Reynolds $-\overline{u'v'}$ . . . . .	171
7.9	Facteur de dissymétrie des fluctuations longitudinales, normales à la paroi et transversales. . . . .	174
7.10	Facteur d'aplatissement des fluctuations longitudinales, normales à la paroi et transversales. . . . .	175
7.11	Densités spectrales pré-multipliées par $k_x^+ k_z^+$ de $u'u'$ , $v'v'$ , $w'w'$ et $u'v'$ dans le plan $(x, z)$ à $y^+ = 12$ . . . . .	176
7.12	Densités spectrales pré-multipliées par $k_x^+ k_z^+$ de $u'u'$ , $v'v'$ , $w'w'$ et $u'v'$ dans le plan $(x, z)$ à $y^+ = 100$ . . . . .	179
7.13	Profils des termes des équations de transport à $Re_\tau = 1100$ dans la couche interne. Les profils sont normalisés par $\frac{u_\tau^4}{\nu}$ . . . . .	182

7.14	Profils de la pseudo-dissipation de l'énergie cinétique exprimée dans les échelles internes . . . . .	183
7.15	Évolution de la valeur maximale des termes des équations de budget relevée dans la couche interne en fonction de $Re_\tau$ . Les courbes sont normalisées par leurs valeurs respectives à $Re_\tau = 180$ afin de faciliter la comparaison. . . . .	184
7.16	Densités spectrales prémultipliées de l'énergie cinétique locale $K = \frac{1}{2}u'_i u'_i$ et de l'enstrophie locale $\zeta = \frac{1}{2}\omega'_i \omega'_i$ à $y^+ = 6, 10$ et $14$ pour $Re_\tau = 1100$ . . . . .	185
7.17	Profils des termes des équations de transport à $Re_\tau = 1100$ dans la couche interne. Les profils sont normalisés par $\frac{y}{u_\tau^3}$ . . . . .	188
7.18	Profils de la dissipation $\epsilon_K^+ = \nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)$ et de l'échelle de Kolmogorov définie par $\eta^+ = (\epsilon_K^+)^{-1/4}$ . . . . .	190
7.19	Distribution de $\epsilon_K$ , $\epsilon_{Khom}$ et du rapport $\epsilon_{Khom}/\epsilon_K$ à $Re_\tau = 395$ et à $Re_\tau = 1100$ . . . . .	191
7.20	Distribution de $\epsilon_{Kax1}/\epsilon_K$ , $\epsilon_{Kax2}/\epsilon_K$ , $\epsilon_{Kiso}/\epsilon_K$ et $\epsilon_{Kw}/\epsilon_K$ pour $Re_\tau = 395$ et à $Re_\tau = 1100$ . . . . .	194
7.21	Fluctuations $u'$ , $v'$ , $w'$ et $-u'v'$ dans le plan $(x, z)$ parallèle aux parois à $y^+ = 10$ dans le cas $Re_\tau = 1100$ . . . . .	195
7.22	Création d'une strie basse et haute vitesse par trois structures contrarotatives . . . . .	196
7.23	Densités spectrales pré-multipliées $k_x^+ k_z^+ E_{u'u'}$ des champs filtrés superposées aux spectres des champs non filtrés en $y^+ = 10$ et $Re_\tau = 1100$ . . . . .	197
7.24	Corrélations transversales $R_{u'u'}$ , $R_{v'v'}$ et $R_{w'w'}$ entre les fluctuations de vitesse $z$ et en $z + \Delta z$ en fonction de $\Delta z^+$ pour $Re_\tau = 395, 590$ et $1100$ et à $y^+ = 10$ . . . . .	199
7.25	Corrélations transversales $R_{u'\tau'}$ , $R_{v'\tau'}$ et $R_{w'\tau'}$ entre les fluctuations de la contrainte pariétale en $(y = 0, z)$ et les fluctuations de vitesse en $(y = 10\delta_\nu, z + \Delta z)$ en fonction de $\Delta z^+$ pour $Re_\tau = 395, 590$ et $1100$ . . . . .	203
8.1	Mécanismes de production de la vorticité longitudinale . . . . .	207
8.2	Processus de production de vorticité longitudinale par soulèvement de la vorticité transverse puis inclinaison de la vorticité normale induite . . . . .	208
8.3	Moyenne quadratique des fluctuations de vorticité pour $Re_\tau = 180, 395, 590$ et $1100$ . . . . .	209

8.4	Profils des contributions $A$ , $B$ et $C$ de l'équation 8.11 de $\overline{\omega_y'^2}$ pour $Re_\tau = 180, 395, 590$ et $1100$ . . . . .	213
8.5	Transport de l'intensité turbulente des différentes composantes de la vorticité à $Re_\tau = 180, 395, 590$ et $1100$ . . . . .	216
8.6	Densités spectrales pré-multipliées des fluctuations de vorticité à la paroi (pour $E_{\omega'_x \omega'_x}^+$ et $E_{\omega'_z \omega'_z}^+$ ) et en $y^+ = 12$ pour $E_{\omega'_y \omega'_y}^+$ . . . . .	218
8.7	Représentation des différents termes de l'équation 8.17 prémultipliés par $k_x^+ k_z^+$ dans le plan $(x, z)$ à $y^+ = 12$ . . . . .	220
8.8	À gauche : Densité spectrale prémultipliée de $u'$ superposée avec la fonction $\mathcal{F}$ de l'équation 8.19. À droite : Densité spectrale prémultipliée de $\omega'_y$ superposée avec la densité spectrale estimée selon la relation 8.19 . . . . .	221
9.1	Franchissements d'un niveau $l$ par le signal $S(t)$ , marqué par le signal $Q(t)$ . . . . .	225
9.2	Fréquence de passage des fluctuations de vitesse longitudinale par le niveau $l_u$ à $y^+ = 12$ et $Re_\tau = 1100$ déterminée dans la direction transverse et dans la direction longitudinale . . . . .	231
9.3	Échelles de Taylor associées aux fluctuations de vitesse longitudinale dans les directions longitudinale et transverse pour $Re_\tau = 180, 395, 590$ et $1100$ . . . . .	232
9.4	Échelles de Taylor associées aux fluctuations de vitesse normale dans les directions longitudinale et transverse pour $Re_\tau = 180, 395, 590$ et $1100$ . . . . .	233
9.5	Production moyenne non-biaisée pour les franchissements avec le niveau $l_u$ dans les directions longitudinale et transverse à $y^+ = 12$ . . . . .	236
9.6	Moyennes de production biaisée et non biaisée lors du franchissement bidimensionnel du niveau $l_v$ par les fluctuations de vitesse $v'$ , dans le plan $y^+ = 12$ à $Re_\tau = 1100$ . . . . .	238
9.7	Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements du niveau $l_u$ par les fluctuations de vitesse $u'$ aux limites de la sous-couche visqueuse en $y^+ = 5$ . . . . .	239
9.8	Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements du niveau $l_v$ par les fluctuations de vitesse $v'$ aux limites de la sous-couche visqueuse en $y^+ = 5$ . . . . .	240

9.9	Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements des niveaux $l_u$ et $l_v$ par les fluctuations de vitesse $u'$ et $v'$ aux limites en $y^+ = 12$ . . . . .	241
9.10	Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements des niveaux $l_u$ et $l_v$ par les fluctuations de vitesse $u'$ et $v'$ aux limites en $y^+ = 50$ . . . . .	242
9.11	Moyenne de Palm non biaisée de la vitesse normale basée sur les franchissements du niveau $l_u$ par les fluctuations de vitesse $u'$ en $y^+ = 12$	243
9.12	Moyenne de Palm $(\overline{v'^*})_{l_u}$ normalisée par $R_{u'v'}\sigma_v$ en $y^+ = 12$ et $y^+ = 120$ . . . . .	246
9.13	Variations de la moyenne de Palm $(\overline{v'^+})_{l_u}$ exprimée dans les échelles internes et de la moyenne $(\overline{v'^*})_{l_u}$ normalisée par le paramètre $R_{u'v'}\sigma_v$ en fonction du nombre de Reynolds $Re_\tau$ . . . . .	247
9.14	Moyennes de Palm $(\overline{v'^*})_{l_u}$ et $(\overline{u'^*})_{l_v}$ des fluctuations de vitesse normale et longitudinale normalisées respectivement par $R_{u'v'}\sigma_v$ et $R_{u'v'}\sigma_u$ à $Re_\tau = 1100$ en $y^+ = [5, 10, 12, 30, 50, 120, 200]$ . Les droites $(\overline{v'^*})_{l_u} = -l_u^*$ et $(\overline{u'^*})_{l_v} = -l_v^*$ correspondent au cas où $u'$ et $v'$ sont conjointement normales . . . . .	249



# Table des notations

## Quantités physiques

$x$ ou $x_1$		Direction longitudinale
$y$ ou $x_2$		Direction normale aux parois
$z$ ou $x_3$		Direction transverse
$t$	[s]	Temps
$u$ ou $u_1$	[ms <sup>-1</sup> ]	Composante de la vitesse dans la direction longitudinale
$U$	[ms <sup>-1</sup> ]	Moyenne de la vitesse longitudinale
$v$ ou $u_2$	[ms <sup>-1</sup> ]	Composante de la vitesse normale aux parois
$w$ ou $u_3$	[ms <sup>-1</sup> ]	Composante de la vitesse dans la direction transverse
$\boldsymbol{\omega}$	[s <sup>-1</sup> ]	Vecteur de la vorticité
$p$	[Pa]	Pression
$T$	[K]	Température
$\nu$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Viscosité cinématique du fluide
$\rho$	[kg <sup>2</sup> m <sup>-3</sup> ]	Masse volumique du fluide
$\tau$	[Pa]	Contrainte
$K = \frac{1}{2}u'_i u'_i$	[m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]	énergie cinétique locale
$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}_K$	[m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]	Production de l'énergie cinétique turbulente $\mathcal{P} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$
$\epsilon_K$ et $\tilde{\epsilon}_K$	[m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]	Dissipation et pseudo-dissipation de l'énergie cinétique moyenne $\overline{K} = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$

##  chelles et adimensionnalisation

$h$	Demi-hauteur du canal
$\delta_\nu$	échelle de longueur visqueuse
$\eta$	échelle de Kolmogorov
$U_c$	Vitesse au centre du canal
$U_{cp}$	Vitesse au centre du profil de Poiseuille initial
$u_\tau$	Vitesse de friction
$q^*$	Quantité adimensionnalisée (dans les échelles externes par exemple)
$q^+$	Quantité exprimée dans les échelles internes



$Re$	Nombre de Reynolds basé sur $U_c$ , $h$ et $\nu$
$Re_P$	Nombre de Reynolds basé sur le profil de Poiseuille initial $Re_P = hU_{cp}/\nu$
$Re_\tau$	Nombre de Reynolds basé sur $u_\tau$ , $h$ et $\nu$
$Pr$	Nombre de Prandtl

**Notations mathématiques**

$\bar{q}$	Valeur moyenne de la quantité $q$ dans le plan $(x, z)$
$q'$	Écart de la quantité $q$ par rapport à sa moyenne $\bar{q}$
$\hat{q}$	Transformée de Fourier de $q$
$q _x$	Valeur de $q$ à la position $x$
$\mathbb{E}([q]_C)$	Espérance de la quantité $q$ sachant la condition $C$
$\sigma_q$	Écart type de la quantité $q$
$\overline{\bar{q}}$	Moyenne quadratique de la quantité $q$ , également appelé R.M.S
$S_q$	Facteur de dissymétrie de la variable $q$
$F_q$	Facteur d'aplatissement de la variable $q$
$R_{uv}$	Corrélation entre les quantités $u$ et $v$
$\mathbf{q}$	Quantité vectorielle
$q_{x_i}$ ou $q_i$	Composante du vecteur $\mathbf{q}$ dans la direction $x_i$
$\iota$	Unité imaginaire $\iota = \sqrt{-1}$
$\Re\{q\}$	Partie réelle d'une quantité complexe $q$
$\Im\{q\}$	Partie imaginaire d'une quantité complexe $q$

**Schémas de calcul et discrétisation**

D0s	Schéma d'interpolation
D1s	Schéma de type « <i>staggered</i> » pour le calcul de la dérivée première
D1c	Schéma de type « <i>collocated</i> » pour le calcul de la dérivée première
D2c	Schéma de type « <i>collocated</i> » pour le calcul de la dérivée seconde
EXPOPT	Configuration « explicite optimisée » du code DNS
$h$	Taille des mailles
$\Delta t$	Pas de temps
$k$	Nombre d'onde
$c$	Vitesse de phase de l'équation d'onde
$\omega$	Pulsation
$kh$	Paramètre contrôlant la précision de la discrétisation spatiale
$\omega\Delta t$	Paramètre contrôlant la précision de l'avancement temporel
$CFL$	Nombre de Courant-Fredrich-Levy $CFL = c\Delta t/h = \omega\Delta t/kh$
$\frac{\delta^n f}{\delta x^n}$	Estimation numérique de la dérivée $n$ -ième
$k^{(n)}$	Nombre d'onde modifié pour la dérivée $n$ -ième
$\mathcal{T}$	Fonction de transfert
$G$	Facteur d'amplification de la solution numérique
$c_N$	Vitesse de phase de la solution numérique
$V_g$	Vitesse de groupe de la solution numérique

**Domaine de calcul**

$L_x, L_y, L_z$	Taille du domaine dans les directions $x, y$ et $z$
$N_x, N_y, N_z$	Nombre de points dans les directions $x, y$ et $z$
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Taille des mailles dans les directions $x, y$ et $z$
$s$	Coordonnée régulière selon la direction $y$
$i, j, k$	Indices associés aux directions $x, y$ et $z$



# Introduction générale

La turbulence est un état des écoulements caractérisé par la formation et la co-existence d'un grand nombre de structures d'échelles très variées. Ce phénomène est particulièrement répandu dans la nature et se retrouve, par exemple, dans le corps humain dans les vaisseaux sanguins, dans les océans ou encore dans l'atmosphère des planètes. La grande tache rouge de Jupiter, et les petites structures environnantes, ou encore la granulosité de la surface du Soleil sont des exemples de turbulence particulièrement frappants, qui illustrent l'universalité de ce phénomène. Dans les situations industrielles, les écoulements turbulents peuvent jouer un rôle favorable ou au contraire néfaste selon la finalité des processus considérés. Dans le cas d'un écoulement autour d'une aile d'avion, la turbulence engendre une grande variété de structures dont la taille varie de quelques microns à quelques dizaines de centimètres. Celle-ci joue alors un rôle néfaste puisqu'une partie substantielle de l'énergie motrice de l'avion est emportée par la traînée. Inversement, la turbulence peut améliorer considérablement l'efficacité de certains processus industriels, notamment par sa propension à favoriser le mélange, c'est à dire à « diffuser » les quantités transportées dans l'ensemble de l'écoulement. Cette caractéristique est particulièrement utile dans les systèmes d'échange de chaleur où la chaleur d'un milieu (par exemple, dans un réacteur nucléaire) est évacuée par le passage d'un écoulement turbulent dans une conduite. La turbulence permet alors d'augmenter l'efficacité du transfert de chaleur.

Les écoulements turbulents occupent souvent une place centrale dans l'industrie et leur étude revêt un fort intérêt stratégique dans le contrôle et l'optimisation des processus industriels. Une meilleure compréhension de la turbulence, notamment de sa génération et de son maintien, pourrait permettre d'élaborer des stratégies de renforcement ou au contraire de réduction de ses effets selon le but recherché. En dépit des nombreuses recherches réalisées sur le sujet, les écoulements turbulents restent difficiles à appréhender du fait de la complexité des interactions entre leurs

différentes échelles et ont longtemps été considérés comme purement désordonnés. Cette vision a cependant beaucoup évolué au cours de la dernière moitié du 20<sup>ème</sup> siècle, marquée par des découvertes majeures sur les structures turbulentes. La visualisation des couches limites turbulentes a notamment permis d’observer directement les structures tourbillonnaires et de remarquer que celles-ci prenaient souvent des formes similaires, ressemblant à des fers à cheval ou à des épingles à cheveux [1]. Les expériences menées par la suite [2, 3] ont par ailleurs montré que ces petites structures tourbillonnaires pouvaient s’organiser au sein de structures plus grandes, de nature non tourbillonnaire, appelées grandes structures. Parallèlement, la répétition de structures de formes semblables au sein de l’écoulement a conduit les théoriciens à s’interroger sur la nature purement désordonnée de la turbulence et à adopter un angle plus déterministe à travers la modélisation des structures tourbillonnaires. Cette approche déterministe a été notamment mise en œuvre par Townsend [4] à travers la notion de structure attachée qui a rencontré de nombreux succès dans la description des principales statistiques de l’écoulement (vitesse moyenne et fluctuations de vitesse notamment).

Durant ces dernières décennies, la simulation numérique a su trouver une place de première importance dans l’étude des écoulements turbulents. Les simulations réalisées selon l’approche de Simulation Numérique Directe (DNS pour l’anglais Direct Numerical Simulation), qui consiste à résoudre l’intégralité des échelles de l’écoulement, ont montré la capacité de l’approche numérique à reproduire fidèlement les caractéristiques fondamentales de la turbulence [5], jusqu’alors mesurées expérimentalement. Un avantage évident des simulations numériques réside dans l’absence d’incertitudes de mesure, la précision des résultats étant limitée uniquement par la résolution du maillage et par la précision des méthodes numériques utilisées et est de fait facilement quantifiable. Par ailleurs, les simulations numériques offrent une connaissance complète des quantités physiques en tout point du domaine de calcul et facilitent considérablement l’accès à certaines statistiques, telles que les différents termes des équations de transport, difficiles à évaluer expérimentalement. L’augmentation continue de la puissance de calcul, soutenue d’une part par la puissance croissante des processeurs et d’autre part par la conception d’architectures massivement parallèles permettant de conduire des simulations sur un grand nombre de processeurs, a permis de repousser continuellement la limite des nombres de Reynolds accessibles. Une simulation à  $Re = 140000$  (nombre de Reynolds basé sur la vitesse au centre) a été récemment réalisée par Lee et al. [6] sur un domaine de

longueur  $L_x = 8\pi h$  et de largeur  $L_z = 3\pi h$  constitué de  $15360 \times 1536 \times 11520$  points. Ce nombre de Reynolds est près de 40 fois supérieur à celui des simulations numériques directes de Kim et al. [7] réalisées en 1987 ( $Re = 3300$ ) et a nécessité près de 260 000 millions d’heures de calculs parallèles sur la machine Mira, qui est à l’heure actuelle le cinquième supercalculateur en terme de performances.

Ce travail de thèse présente les résultats de simulations numériques directes conduites sur des écoulements turbulents en canal, à différents nombres de Reynolds. Les nombres de Reynolds considérés ici se situent dans la fourchette haute des nombres de Reynolds habituellement considérés en simulation numérique directe et nous permettrons d’étudier les grandes structures de l’écoulement, qui jouent un rôle de plus en plus important au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente. La validité des modèles de turbulence existants sera étudiée et discutée à travers les statistiques de l’écoulement. Par exemple, la question du comportement de la vitesse moyenne selon une loi logarithmique ou une loi de puissance continue de faire l’objet d’un intense débat dans la littérature et sera discutée à travers l’étude des fonctions de diagnostic de la vitesse moyenne. Des statistiques plus élaborées, telles que les corrélations de vitesse ou les spectres de vitesse, seront également considérées afin de caractériser les structures de l’écoulement.

Les nombres de Reynolds visés dans cette étude sont relativement élevés et ont demandé un travail préalable d’optimisation du code DNS. La parallélisation du code ainsi que l’utilisation de schémas de différence finie plus précis ont été rapidement identifiées comme les principales pistes d’optimisation et sont traitées en détail dans la première partie de la thèse.

La seconde partie s’attache à décrire les optimisations finalement apportées au code et à démontrer l’adéquation du nouveau code aux nombres de Reynolds visés. L’implémentation des schémas à haute précision sera validée à travers la simulation d’un écoulement en canal à faible nombre de Reynolds. Les performances parallèles du code sur le supercalculateur TURING, utilisé pour nos simulations numériques, seront ensuite démontrées. Des développements annexes ont par ailleurs été effectués afin de permettre l’étude de configurations d’écoulements plus complexes, tel que la circulation d’un écoulement autour d’un corps immergé, et seront également présentés.

La troisième partie est consacrée à l’analyse physique des résultats obtenus pour les différents nombres de Reynolds étudiés. Les statistiques les plus communes sur le

champ de vitesse seront d'abord présentées et comparées aux connaissances actuelles sur la turbulence de paroi. Une étude inédite du transport de la vorticité sera ensuite réalisée afin de mieux comprendre les mécanismes de formation des tourbillons. Enfin, le dernier chapitre s'intéressera à l'influence des événements intenses sur la production.

# Première partie

## Approches numériques adaptées à la simulation d'écoulements turbulents

Les simulations présentées au cours de ce travail ont été obtenues selon une approche de simulation numérique directe (DNS), retenue pour sa grande fiabilité. Cette méthode est cependant très coûteuse en comparaison des autres approches existantes (LES ou RANS) pour les nombres de Reynolds visés et le code DNS a donc été optimisé afin de réduire au maximum le coût numérique.

Cette partie est consacrée aux stratégies d'optimisations implémentées dans le code. Dans un premier temps, nous étudierons les différentes approches de parallélisation (exécution du code sur plusieurs processeurs) existantes de façon à identifier l'approche la plus pertinente. Une autre piste d'optimisation consiste à augmenter la précision des schémas de calcul utilisés afin de pouvoir travailler sur des grilles de calcul plus réduites. Le deuxième chapitre présentera les schémas de différence finie à haute précision proposés dans la littérature en vue de leur utilisation dans le code DNS.





# Chapitre 1

## Stratégies de parallélisation

### 1 Introduction

Les simulations d'écoulements pleinement turbulents nécessitent l'utilisation de maillages extrêmement fins et ne peuvent être menées à terme (dans des temps acceptables) sur un ordinateur classique. Une parallélisation du code a donc été effectuée afin de pouvoir partager les traitements à effectuer sur plusieurs milliers de processeurs et ainsi réduire considérablement la durée d'une simulation. Dans la pratique, la parallélisation d'un code est une étape très délicate qui demande généralement beaucoup de temps et de rigueur (j'ai d'ailleurs suivi plusieurs formations préalables à l'IDRIS). La phase de développement du code parallèle doit donc impérativement être précédée d'une étude des différentes approches envisageables afin de pouvoir effectuer un choix définitif de la stratégie à implémenter.

Ce chapitre propose une description des différentes stratégies de parallélisation envisageables. Une étude des besoins sera préalablement menée afin de déterminer le niveau de parallélisation recherché.

### 2 Définitions

Dans sa définition générale, le parallélisme consiste à décomposer une tâche (par exemple, la résolution des équations de Navier-Stokes sur l'ensemble du domaine de calcul) en plusieurs sous-tâches (résolution sur une partie du domaine de calcul) chacune étant exécutée par un processus.

Par la suite, on s'intéressera souvent à l'*accélération* obtenue lorsque l'on passe de  $N_{ref}$  à  $N_{procs}$  processus. L'accélération est définie comme le rapport des temps

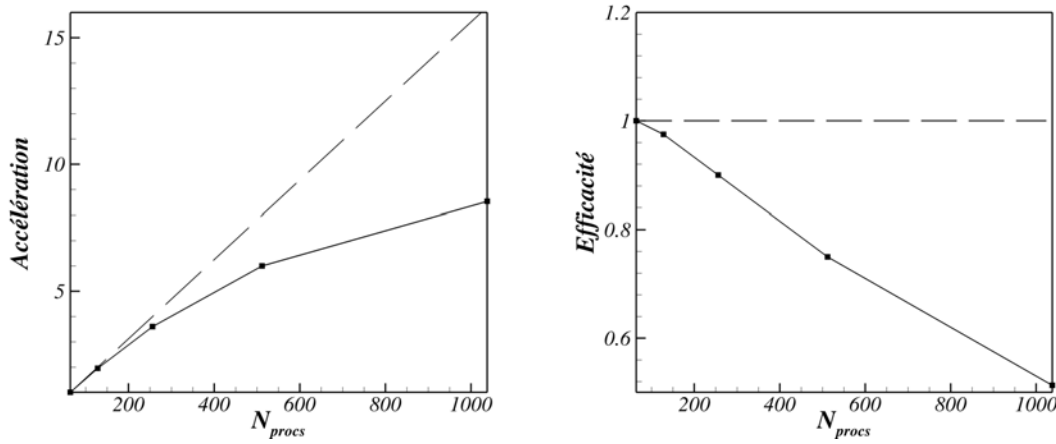


FIGURE 1.1 – Exemple de courbes d’accélération (à gauche) et d’efficacité (à droite) d’un code parallèle en fonction du nombre de processus

d’exécution à  $N_{procs}$  et à  $N_{ref}$  processus :

$$A(N_{procs}, N_{ref}) = \frac{T_{N_{procs}}}{T_{N_{ref}}} \quad (1.1)$$

Idéalement, l’accélération obtenue devrait être égale au rapport  $N_{procs}/N_{ref}$ . Dans la pratique, celle-ci s’écarte peu à peu de ce rapport au fur à mesure que le nombre de processus augmente. Il est donc utile de comparer l’accélération idéale avec l’accélération réellement obtenue pour mesurer la performance du code à  $N_{procs}$  processus. C’est la notion d’*efficacité* :

$$E(N_{procs}, N_{ref}) = \frac{A(N_{procs}, N_{ref})}{N_{procs}/N_{ref}} \quad (1.2)$$

Une exécution parallèle d’un code à  $N_{procs}$  processus sera jugée pertinente si son efficacité est suffisamment proche de 1. À titre d’illustration, la figure 1.1 montre les courbes d’accélération et d’efficacité d’un code faiblement parallèle (pour le problème auquel il a été appliqué). On observe qu’à partir de  $N_{procs} = 512$ , l’accélération commence à stagner tandis que l’efficacité devient relativement faible. Cette observation nous conduit à la notion d’extensibilité, très utile pour mesurer la « portée » de la parallélisation, qui correspond au nombre de processus au-delà duquel l’exécution parallèle du code ne permet plus d’obtenir un gain sensible sur le temps de calcul. Dans le cas de la figure 1.1, l’extensibilité du code pour le problème étudié est de l’ordre de 512 processus.

### 3 Objectifs

La plupart des simulations d'écoulements turbulents présentées dans la littérature nécessiteraient plusieurs millions d'heures dans le cas d'une exécution séquentielle. L'ensemble des simulations présentées dans cette thèse a nécessité près de 20 millions d'heures CPU, soit quelques milliers d'années en exécution séquentielle. Dans ce contexte, notre objectif a été d'accélérer l'exécution du code d'au moins un facteur 10 000 afin de pouvoir ramener la durée d'exécution à un délai raisonnable (de l'ordre de quelques mois). Les méthodes de parallélisation présentées dans ce chapitre seront discutées au regard de leur aptitude à fournir une telle accélération avec un nombre de processus aussi réduit que possible afin d'utiliser les ressources mises à notre disposition de façon optimale. L'extensibilité recherchée est donc de l'ordre de 10 000 processus.

### 4 Choix du paradigme de parallélisation

Dans la pratique, trois grands types de parallélisme peuvent être mis en œuvre sur la plus grande partie des machines parallèles actuelles : le parallélisme à mémoire partagée, le parallélisme à mémoire distribuée et l'approche hybride combinant ces deux formes de parallélisme. Cette section se propose de présenter ces différentes approches à travers la façon dont les processus exploitent les ressources de la machine. Nous discuterons finalement les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles afin de pouvoir effectuer un choix définitif sur l'approche à adopter pour notre étude.

#### 4.1 Description des différents types de parallélisme

Le code a été exécuté sur le supercalculateur Turing mis à notre disposition par l'IDRIS. Cette machine est constituée d'un vaste réseau de processeurs, également appelés « nœud de calcul ». Les calculs confiés à un processeur sont en réalité réalisés par 16 unités d'exécutions autonomes (cœurs) ayant chacune un accès direct à la mémoire vive du nœud de calcul (16 Go). Au total, la machine Turing comporte près de 98 000 cœurs pouvant chacun effectuer une partie des calculs parallèlement aux autres.

Ainsi, comme la plupart des architectures parallèles, les machines Babel et Turing offrent deux niveaux de parallélisme : un parallélisme à l'échelle d'un nœud (impli-

quant les cœurs de ce nœud) et un parallélisme plus étendu qui implique l'ensemble des nœuds de calcul de la machine. Le parallélisme à mémoire partagée se limite au premier niveau et n'implique donc que des processus partageant les ressources (cœurs et mémoire) d'un même nœud. Dans ce cas, les processus, exécutés chacun sur un cœur différent du nœud de calcul, utilisent la mémoire du nœud pour accéder aux données du problème et ont donc une vision complète et commune du problème.

Le second niveau de parallélisme s'étend à l'échelle de la machine. Les processus sont alors distribués sur plusieurs nœuds de calcul et sont donc exécutés par des cœurs appartenant à des nœuds différents. Dans ce cas, les données du problème ne peuvent plus être communes à tous les processus, chaque processus ayant accès uniquement à la mémoire de son nœud de calcul. Le parallélisme à mémoire distribuée est l'approche la plus simple pour mettre en œuvre ce niveau étendu de parallélisme. Cette approche consiste à ne pas faire de distinction entre les processus (ceux situés sur un même nœud de calcul et les autres) et à découper le problème en plusieurs jeux de données chaque jeux de données étant traité par un processus. Dans ce cas, il n'existe aucun partage des données entre processus et deux processus situés dans le même nœud de calcul auront chacun leurs propres jeux de données. Une autre approche consiste à distribuer les jeux de données non plus par processus (et donc par cœurs) mais par nœud de calcul. Les processus d'un même nœud de calcul partagent alors le jeu de données affecté à leur nœud. L'utilisation d'un parallélisme à mémoire partagée à l'intérieur d'un nœud et d'un parallélisme à mémoire distribuée entre les différents nœuds de calcul vaut à cette approche le nom de parallélisme hybride.

Naturellement, des bibliothèques ont été développées afin de permettre aux chercheurs de développer assez simplement des applications parallèles efficaces et portables d'une architecture à l'autre. Parmi les plus utilisées, on citera la bibliothèque OpenMP permettant de paralléliser un code selon l'approche mémoire partagée et la bibliothèque MPI (Message Passing Interface) permettant de synchroniser et de faire communiquer les différents processus dans le cas de l'approche mémoire distribuée. La parallélisation d'un code selon l'approche hybride, plus délicate, peut être réalisée en combinant ces deux bibliothèques. La difficulté de cette approche ne tient pas seulement au fait qu'elle requiert une bonne connaissance d'OpenMP et de MPI mais également qu'elle demande une certaine expertise pour appréhender toutes les subtilités issues de la collaboration de ces deux outils.

## 4.2 Décomposition du domaine

Dans le cas du parallélisme à mémoire distribuée retenu pour cette étude, la décomposition du domaine consiste à définir la façon dont le domaine de calcul sera découpé en jeux de données afin d'être réparti sur l'ensemble des processus. La décomposition du domaine est une étape très importante dont dépend étroitement l'efficacité de la parallélisation effectuée ainsi que la complexité de son implémentation.

Le découpage d'un domaine de calcul 3D peut être effectué selon une direction seulement (découpage 1D), deux directions (découpage 2D) ou l'ensemble des directions du domaine (décomposition 3D). La figure 1.2 propose une vue de ces différents types de découpage ainsi que des différentes configurations qui leur sont associées. On notera que dans le cas des découpages 1D et 2D les processus ont une vue complète du problème dans certaines directions et peuvent donc travailler de manière autonome dans ces directions. Nous présenterons ici seulement la décomposition 3D et la décomposition 2D, l'approche 1D étant conceptuellement similaire à l'approche 2D mais beaucoup moins efficace en termes d'extensibilité.

### 4.2.1 Décomposition 3D

La décomposition 3D consiste à adopter un découpage 3D et à le conserver tout au long de l'exécution. Dans la pratique, la décomposition 3D est une approche relativement complexe à implémenter puisque la plupart des algorithmes utilisés (schémas de calcul, résolution des équations de Poisson etc.) dans le code DNS nécessitent une connaissance des données aux points voisins voire une connaissance complète des données selon une direction. Or, à proximité des interfaces, ces algorithmes ne peuvent être appliqués en l'état du fait que les données situées en dehors du sous-domaine ne sont pas connues. Les stratégies envisageables pour résoudre ce problème sont alors très variées et dépendent étroitement de la nature des algorithmes. Certaines de ces stratégies appliquées au cas des schémas de différences finies compacts seront présentées dans la section 5.2 du chapitre 2. Enfin, certains algorithmes prévus pour une exécution séquentielle ne sont pas ou peu parallélisables et doivent alors être remplacés par des algorithmes conçus et optimisés pour le parallélisme. Ainsi, la parallélisation d'un code selon une décomposition 3D nécessite de mettre en œuvre des stratégies ciblées pour chaque algorithme utilisé et peut donc se révéler extrêmement délicate.

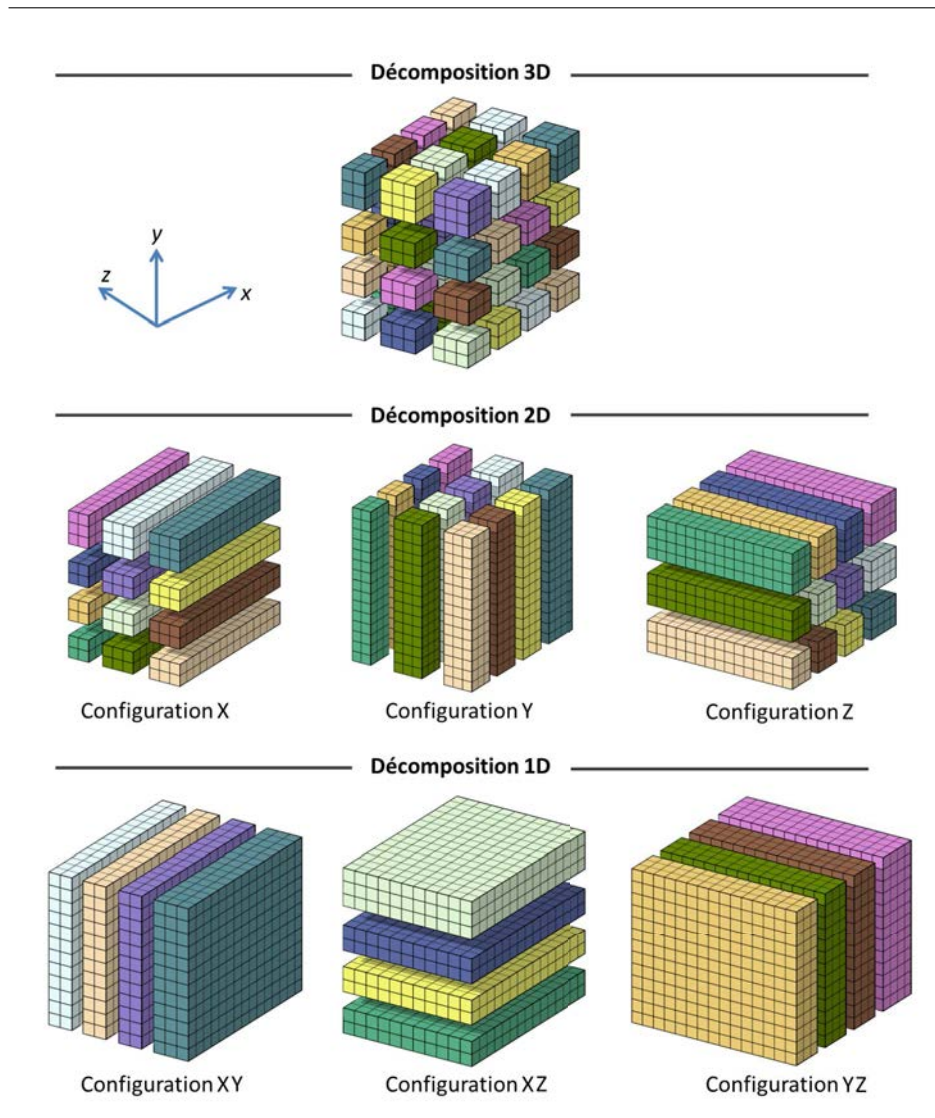


FIGURE 1.2 – Décomposition 1D, 2D et 3D du domaine de calcul

### 4.2.2 Décomposition 2D

La décomposition 2D dynamique constitue une solution élégante à ce problème qui consiste à effectuer un découpage 2D dont la configuration est modifiée au long de l'exécution de façon à permettre, à chaque instant, une exécution autonome des algorithmes, c'est-à-dire sans qu'aucune communication ne soit nécessaire entre les processus. Par exemple, la configuration  $x$  de la figure 1.2 offre une vue complète du domaine de calcul dans la direction  $x$  et peut donc permettre un calcul autonome des dérivées selon cette direction. Le calcul des dérivées selon d'autres directions ( $y$  ou  $z$ ) nécessite de redistribuer les jeux de données (transposition) afin de changer de configuration.

La décomposition 2D dynamique présente donc l'avantage de permettre une exécution autonome de l'ensemble des algorithmes du code et est donc beaucoup moins intrusive et plus facile à implémenter qu'une décomposition 3D. On appréciera également la grande généricité de cette approche qui, en raison de l'application autonome des algorithmes, offre des performances complètement indépendantes des algorithmes utilisés.

Naturellement, cette approche réduit le nombre de processus utilisables par rapport à la décomposition 3D. Ainsi dans le cas d'un maillage de résolution  $500 \times 700 \times 1000$  (résolution comparable à celle utilisée dans nos simulations), la décomposition 2D permettra d'utiliser au maximum 350 000 processus. Cette limite, largement au-delà de l'extensibilité recherchée, reste toutefois très théorique et ne tient pas compte des problèmes de répartition de la charge de calcul lorsque les processus travaillent sur des sous-domaines aussi réduits. L'expérience montre qu'il est préférable de travailler avec des sous-domaines d'au moins  $5 \times 5$  lignes pour obtenir de bonnes performances. La décomposition 2D offre donc une extensibilité effective de l'ordre de  $350\,000/25=14\,000$  processus qui reste suffisante pour cette étude.

Une autre limite de la décomposition 2D tient dans les coûts relativement élevés en communication, variables d'une architecture à l'autre, du fait des transpositions qui doivent être effectuées lorsque l'exécution autonome du code requiert un changement de configuration. Dans le cas de la machine Jugene analogue au calculateur Turing utilisé dans cette étude, les coûts liés aux communications représentent près de 45% du temps de calcul d'après les tests réalisés sur le code Incompact3D [8]. Le redécoupage complet du domaine est en effet une opération relativement coûteuse en termes de communications au cours duquel chaque processus reçoit des autres processus une quantité de données équivalente à la taille de son sous-domaine. Il est toutefois important de préciser que, dans le cas idéal, la proportion des communi-



cations dans le temps d'exécution n'augmente pas avec le nombre de processus (la taille des sous-domaines étant inversement proportionnelle au nombre de processus) et ne compromet donc pas l'extensibilité du code.

Pour conclure, on retiendra que la décomposition 2D permet d'atteindre un haut niveau de parallélisme tout en apportant un minimum de changements au code. En outre, le surcoût numérique inhérent à l'approche 2D est largement compensé par l'économie en temps de développement apportée par la simplicité de cette approche. C'est donc cette approche qui sera utilisée pour la parallélisation du code DNS.

## Chapitre 2

# Étude comparative des schémas de calcul à haute précision

### 1 Introduction

Toutes les simulations qui seront présentées ultérieurement dans cette thèse ont été produites à partir du code DNS d'Orlandi [9], historiquement utilisé par le LEGL. Ce code a cependant dû être modifié et optimisé afin de pouvoir être appliqué aux écoulements turbulents. Ces optimisations ont notamment porté sur les « schémas de calcul », utilisés pour estimer les opérateurs différentiels intervenant dans les équations de Navier-Stokes discrétisées. En effet, si les schémas de différences finies utilisés initialement dans ce code avaient le mérite de la simplicité et de produire des résultats satisfaisants pour des écoulements à nombre de Reynolds modéré, leur précision assez faible (ordre 2) impose d'utiliser des maillages fins dont la taille de maille est petite devant les échelles physiques de l'écoulement. Ces échelles devenant elles-mêmes très petites dans le cas turbulent, une application directe du code initial est inenvisageable en raison du maillage extrêmement raffiné qu'il faudrait utiliser. Une étude de la littérature a donc été réalisée au début de cette thèse afin d'identifier les schémas de différence finie les plus adaptés en termes d'efficacité et de précision.

Durant ces dernières décennies, des progrès significatifs ont été accomplis concernant les schémas de calcul des termes spatiaux des équations de Navier-Stokes. Les schémas compacts, introduits par Hirsh [10] et récemment popularisés par Lele [11], fournissent des estimations précises des opérateurs différentiels et cela même sur des maillages grossiers au regard des variations de la fonction considérée. Une autre approche proposée par Tam et Webb [12] consiste à utiliser des schémas explicites dits « optimisés » dont les coefficients ont été déterminés selon une approche

spectrale consistant à minimiser l'erreur commise dans l'espace de Fourier. Les schémas de calcul à haute précision, compacts ou explicites optimisés, permettent la résolution des équations de l'écoulement sur des grilles plus grossières et ainsi de réduire significativement le temps de calcul par rapport à l'utilisation de schémas de différence finie d'ordre 2. Ces schémas semblent donc parfaitement appropriés à la simulation d'écoulements turbulents et suscitent à ce titre un intérêt grandissant dans la littérature.

Dans ce contexte, ce chapitre s'attachera à présenter les schémas de calculs et les problématiques qui s'y rattachent. La notion de schéma de calcul sera tout d'abord abordée. Nous nous intéresserons ensuite aux différents critères permettant d'évaluer la qualité des schémas de calcul ainsi que leurs effets sur la solution numérique. Les problématiques posées par l'utilisation des schémas à haute précision les plus souvent utilisés, ainsi que les solutions proposées dans la littérature, seront finalement discutées.

## 2 Définition mathématique des schémas de calcul

### 2.1 Formulation générale

Dans un espace discrétisé, on désignera par schéma de calcul toute estimation de la valeur d'un opérateur différentiel d'une fonction en un point à partir des valeurs ou des dérivées de cette fonction en ce point et/ou aux points voisins.

On considère un ensemble  $\mathcal{J}$  de points alignés sur un axe constituant notre domaine de calcul dans lequel chaque point est repéré par un indice déterminé par sa position sur cet axe. Par ailleurs, les points associés à la dérivée d'ordre  $l$  forment l'ensemble noté  $\mathcal{J}_l$ , sous-ensemble de  $\mathcal{J}$ . De manière générale, tout schéma de calcul fournissant une estimation  $F_i^{(k)}$  de la dérivée d'ordre  $k$  d'une fonction  $f$  au point  $i$  peut s'écrire sous la forme :

$$F_i^{(k)} = \sum_{j \in \mathcal{J}_0^{i,k}} a_{0,j}^{(k)} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^{i,k}} a_{1,j}^{(k)} f'_j + \cdots + \sum_{j \in \mathcal{J}_n^{i,k}} a_{n,j}^{(k)} f_j^{(n)} \quad (2.1)$$

L'ensemble  $\mathcal{J}_l^{(i,k)}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{J}_l$  comprenant tous les points de  $\mathcal{J}_l$  utilisés pour le calcul de la dérivée d'ordre  $k$  au point  $i$ . Naturellement, bien qu'appartenant à l'ensemble  $\mathcal{J}_l$ , le point  $i$  dont on estime la dérivée d'ordre  $k$  n'appartient pas à l'ensemble  $\mathcal{J}_l^{(i,k)}$  des points utilisés pour son calcul. La figure 2.1 propose une illustration du problème à travers l'exemple d'un schéma calculant la dérivée pre-

mière d'une fonction au point 4 à partir des valeurs de la fonction aux points 3, 4 et 5 et de sa dérivée première aux points 3, 5 et 6. Le point d'intérêt  $i = 4$  pour lequel on souhaite déterminer la dérivée première est représenté en rouge.

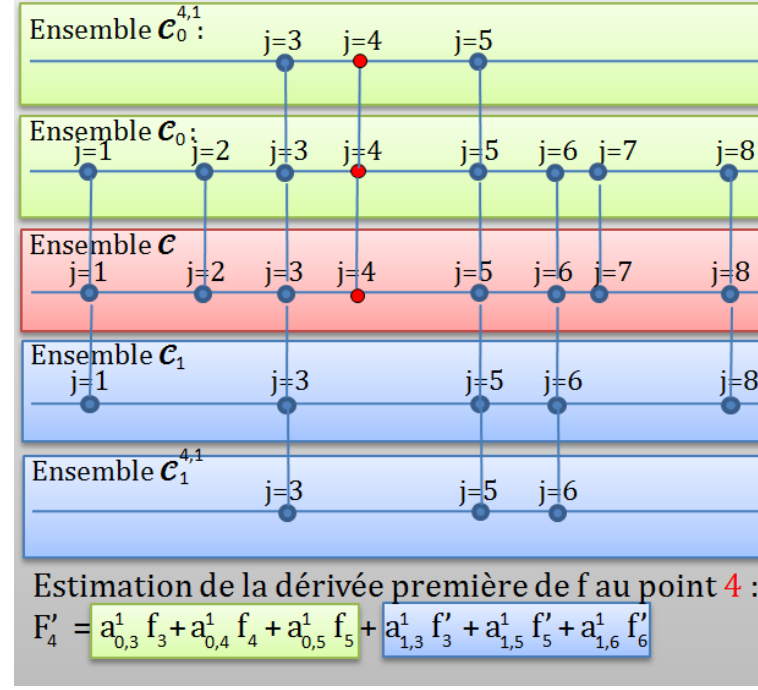


FIGURE 2.1 – Vue des ensembles de points dans le cas d'un schéma estimant la dérivée première au point 4 à partir de la fonction aux points 3, 4, 5 et de ses dérivées aux points 3, 5 et 6

Généralement, seules les valeurs de la fonction sont connues. La détermination d'une dérivée particulière de la fonction requiert donc celle des autres dérivées. Le schéma consiste alors en un système d'équations (que l'on appellera *équations auxiliaires*), analogues à l'équation 2.1 pour la dérivée d'ordre  $k$ , chacune fournissant l'estimation d'une dérivée :

$$\begin{aligned}
 F'_i &= \sum_{j \in \mathcal{J}_0^{i,1}} a_{0,j}^{(1)} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^{i,1}} a_{1,j}^{(1)} F'_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^{i,1}} a_{2,j}^{(1)} F_j^{(2)} + \cdots + \sum_{j \in \mathcal{J}_{n_1}^{i,1}} a_{n_1,j}^{(1)} F_j^{(n_1)} \\
 F_i^{(2)} &= \sum_{j \in \mathcal{J}_0^{i,2}} a_{0,j}^{(2)} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^{i,2}} a_{1,j}^{(2)} F'_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^{i,2}} a_{2,j}^{(2)} F_j^{(2)} + \cdots + \sum_{j \in \mathcal{J}_{n_2}^{i,2}} a_{n_2,j}^{(2)} F_j^{(n_2)} \\
 &\vdots \\
 F_i^{(m)} &= \sum_{j \in \mathcal{J}_0^{i,m}} a_{0,j}^{(m)} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^{i,m}} a_{1,j}^{(m)} F'_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^{i,m}} a_{2,j}^{(m)} F_j^{(2)} + \cdots + \sum_{j \in \mathcal{J}_{n_m}^{i,m}} a_{n_m,j}^{(m)} F_j^{(n_m)}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec  $m = \max(n_1, n_2, n_3 \dots)$ . On notera que, pour  $k \neq 0$ , l'ensemble  $\mathcal{J}_l$  correspond à l'ensemble des points pour lesquelles la dérivée d'ordre  $l$  doit être évaluée.

## 2.2 Dérivation par développement de Taylor

Pour simplifier les développements à venir, on considère à présent que le schéma de calcul n'implique que les valeurs de la fonction et ses dérivées premières (connues en dehors du point  $i$ ) et se réduit donc à une seule équation auxiliaire décrivant la dérivée première au point  $i$  :

$$F'_i = \sum_{j \in \mathcal{J}_0^i} a_{0,j} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^i(j \neq i)} a_{1,j} f'_j \quad (2.3)$$

Par ailleurs, on se place dans le cas simple d'un domaine de calcul composé d'un ensemble de  $\mathcal{J}$  de  $N$  points alignés et répartis uniformément. La distance  $h$  entre deux points consécutifs est donc constante.

Il existe plusieurs approches pour dériver un schéma de calcul à partir de la relation 2.3 une fois que les points intervenant dans son développement ont été choisis. Une approche classique et assez simple consiste à effectuer un développement de Taylor sur chaque dérivée de la relation ci-dessus.

L'équation 2.3 peut s'écrire, si l'on fait intervenir l'erreur commise par l'estimation de la dérivée :

$$F'_i = f'_i + \epsilon_i = \sum_{j \in \mathcal{J}_0} a_{0,j} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1(j \neq i)} a_{1,j} f'_j \quad (2.4)$$

Soit, en effectuant des développements de Taylor autour du point d'intérêt  $i$  :

$$\epsilon_i = \left( \sum_{j \in \mathcal{J}_0} a_{0,j} \right) f_i + \left( \sum_{j \in \mathcal{J}_0} a_{0,j} j h + \sum_{j \in \mathcal{J}_1} a_{1,j} - 1 \right) f'_i + \left( \sum_{j \in \mathcal{J}_0} a_{0,j} \frac{(jh)^2}{2} + \sum_{j \in \mathcal{J}_1} a_{1,j} j h \right) f_i^{(2)} + \dots \quad (2.5)$$

Le schéma optimal impliquant les ensembles de points  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  est alors obtenu en déterminant les coefficients  $a_{ij}$  pour que les premiers termes, de poids plus important, soient nuls. La *précision formelle* du schéma (ou son ordre) est donnée par la plus petite puissance de  $h$  apparaissant dans les termes restants. Le nombre d'équations à résoudre et donc le nombre de termes annulés est égal au nombre d'inconnues  $a_{ij}$ . La précision formelle du schéma augmente donc avec le nombre de points des

ensembles  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$ .

### 2.3 À propos de la précision

Il est important de noter que l'on parle ici de précision *formelle* et non de précision. En effet, bien que la précision dépende de la précision formelle (et donc de  $h$ ), elle est également déterminée par d'autres paramètres qui n'apparaissent pas dans les développements de Taylor. Le positionnement des points des ensembles  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  autour du point d'intérêt  $i$  est un paramètre extrêmement important. Par exemple, il est tout à fait possible d'obtenir une précision formelle d'ordre 4 en prenant quatre valeurs de la fonction en des points très éloignés du point  $i$  mais un schéma n'utilisant que les deux points voisins ( $i - 1$  et  $i + 1$ ) de  $i$  sera naturellement de bien meilleure précision bien que de précision formelle inférieure. On peut toutefois considérer que le gain de précision formelle apporté en ajoutant des points aux ensembles  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  se traduit par une augmentation de la précision si les points ajoutés sont suffisamment proches du point  $i$  pour apporter une information pertinente.

La précision peut donc être améliorée soit en considérant des points situés au-delà du voisinage immédiat du point d'intérêt soit en utilisant des schémas impliquant des dérivées d'ordre supérieur. La première méthode conduit aux schémas explicites qui ne font intervenir que les valeurs de la fonction sur un ensemble de points d'autant plus étendu autour du point d'intérêt que l'on voudra augmenter la précision. La seconde méthode nous amène aux schémas compacts qui font intervenir les dérivées (première et seconde notamment) afin de pouvoir travailler avec un ensemble de points plus proches du point d'intérêt. Du fait qu'ils n'impliquent que les points voisins du point considéré, les schémas compacts fournissent de bien meilleurs résultats que leurs homologues explicites lorsqu'ils sont appliqués sur des fonctions comportant de fortes variations. Ce dernier point s'avère être une grande qualité pour la simulation d'écoulements à grand nombre de Reynolds et explique en grande partie l'intérêt suscité par les schémas compacts dans la littérature.

### 2.4 Construction des ensembles de points

Jusqu'à présent, nous avons considéré des ensembles de points comme fixés préalablement et nous ne nous sommes donc pas intéressés aux différentes options existantes pour leur construction. Cette section se propose donc de présenter brièvement les deux options les plus communes concernant la construction de ces ensembles dans le cas où l'on souhaite déterminer les valeurs de dérivées d'une fonction à partir de

$N$  valeurs de cette fonction.

### Schémas de type « collocated »

Cette option consiste à construire les ensembles  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  de sorte que les valeurs de la dérivée soient évaluées aux  $N$  points associés aux valeurs de la fonction  $f$ . Autrement dit, la dérivée première de la fonction et sa valeur se partagent les mêmes points. L'ensemble qui regroupe tous les points considérés  $\mathcal{J}$ , l'ensemble qui regroupe tous les points associés à la valeur de la fonction  $\mathcal{J}_0$  et l'ensemble qui regroupe tous les points associés à sa dérivée  $\mathcal{J}_1$  sont donc parfaitement identiques. La figure 2.2 propose une vue du positionnement des points dans le cas d'un schéma de type collocated appliqué au cas d'un maillage régulier.

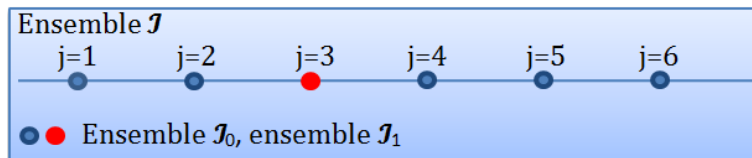


FIGURE 2.2 – Représentation des ensembles de points  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  dans le cas d'un schéma de type « collocated »

### Schémas de type « staggered »

Ces schémas sont construits en imposant que les dérivées soient évaluées au centre des mailles définies par les  $N$  points associés aux valeurs de la fonction (ensemble  $\mathcal{J}_0$ ). Les  $N$  points de l'ensemble  $\mathcal{J}_0$  définissent donc le maillage du domaine. Les  $N - 1$  points de l'ensemble  $\mathcal{J}_1$  associés aux dérivées premières sont placés au centre de chaque maille. L'ensemble  $\mathcal{J}$ , formé par l'union de  $\mathcal{J}_0$  et de  $\mathcal{J}_1$  est donc constitué de  $2N - 1$  points.

La figure 2.3 propose une vue d'un schéma de type staggered dans le cas d'un maillage régulier.

## 3 Principaux schémas de calcul

On reprend ici le cas simplifié d'un ensemble de  $N$  points alignés et répartis uniformément. La distance  $h$  entre deux points voisins est donc constante. Par ailleurs, les schémas seront exprimés sous leur forme « collocated ». Les ensembles  $\mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  (dans le cas des schémas compacts) seront donc confondus. Enfin, les schémas

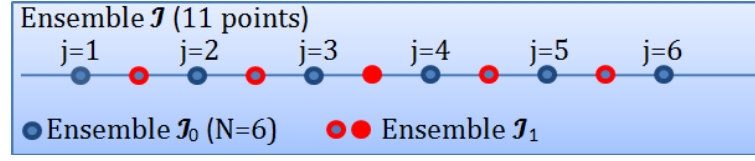


FIGURE 2.3 – Représentation des ensembles de points  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  dans le cas d'un schéma de type « staggered »

seront présentés selon leur version interne : on considérera des points suffisamment éloignés des limites du domaine de calcul pour que tous les points intervenant dans le schéma de calcul soient disponibles. La question de l'expression des schémas au voisinage des bornes du domaine de calcul sera abordée ultérieurement au cours de ce chapitre.

### 3.1 Schémas explicites standards

Le schéma explicite centré d'ordre 2 est un schéma impliquant les valeurs de la fonction au point à droite et au point à gauche du point considéré :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.6)$$

La précision formelle du schéma peut être accrue en augmentant le nombre de points du développement. Par exemple, le schéma explicite d'ordre 4 est défini par :

$$f'_i = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h} + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.7)$$

Les schémas explicites « standards » (dérivés selon l'approche de Taylor) ne seront pas considérés au cours de cette étude. En effet, ceux-ci sont de bien moins bonne précision que les schémas compacts ou explicites optimisés lorsqu'ils sont appliqués à des fonctions comportant de fortes variations et sont donc inadaptés à la simulation d'écoulements turbulents.

### 3.2 Schémas compacts

À la différence des schémas explicites, les schémas compacts impliquent les dérivées de la fonction  $f$  au voisinage du point  $i$ . Cette information supplémentaire permet d'obtenir une précision formelle supérieure à celle de schémas explicites utilisant les mêmes points voisins. Les schémas compacts « classiques » et les schémas compacts combinés constituent l'essentiel des schémas compacts utilisés dans la lit-



térature. Les schémas compacts classiques n'impliquent que la dérivée à estimer, tandis que les schémas combinés impliquent plusieurs dérivées (dérivée première et seconde, le plus souvent) résolues simultanément .

### 3.2.1 Schémas compacts classiques

Les schémas compacts classiques constituent la forme la plus utilisée de schémas compacts et seront donc simplement appelés « schémas compacts » dans la suite de cette thèse. Les premiers schémas compacts introduits par Hirsh [10] sont des schémas compacts standards, dérivés selon l'approche de Taylor, communément appelés schémas de Padé. Le schéma compact de Padé d'ordre 4 pour l'estimation de la dérivée première est de la forme :

$$f'_{i-1} + 4f'_i + f'_{i+1} = \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}) + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.8)$$

Cette expression, ainsi que l'ordre associé au schéma, peut se déduire facilement de la démarche précédente en impliquant les valeurs de la fonction aux points  $i - 1$ ,  $i$  et  $i + 1$  ainsi que les valeurs de sa dérivée première pour les points  $i - 1$  et  $i + 1$  (le coefficient associé à la valeur de la fonction au point  $i$  s'avère finalement nul et n'apparaît donc pas dans le schéma finalement obtenu).

Le schéma de Padé d'ordre 4 pour la dérivée seconde de la fonction s'écrit quant à lui :

$$\frac{1}{12}f''_{i-1} + \frac{10}{12}f''_i + \frac{1}{12}f''_{i+1} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.9)$$

Il est important de remarquer que du fait de l'interdépendance entre les dérivées introduite par les relations 2.8 et 2.9, les schémas compacts sont de nature « globale » et ne permettent pas d'effectuer une estimation « isolée », en un point du domaine de calcul, à la différence des schémas explicites. Le calcul des dérivées nécessite de résoudre un système linéaire de  $N$  équations constitué des relations 2.8 ou 2.9 aux points intérieurs du domaine de calcul ( $i = [2, 3, \dots, N - 2, N - 1]$ ) et de relations particulières aux limites, les relations 2.8 et 2.9 ne pouvant naturellement pas être utilisées aux points  $i = 1$  et  $i = N$ . La nature de ces relations dépend de la nature des conditions aux limites considérées. Par commodité, ce système linéaire peut être exprimé sous une forme matricielle impliquant les vecteurs  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{f}'$  des valeurs de la fonction et de sa dérivée en tout point du domaine de calcul.

$$\mathcal{A}\mathbf{f}' = \mathcal{B}\mathbf{f} \quad (2.10)$$

où les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  comportent les coefficients du schéma (pour les valeurs

de la fonction  $f$  et de sa dérivée) sur l'ensemble des points  $i$  du domaine de calcul. La forme exacte des matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dépend des relations particulières utilisées aux limites. Dans le cas particulier de conditions aux limites périodiques (caractérisées par  $f_0 = f_N, f_{N+1} = f_1 \dots$ ), les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  du schéma de Padé d'ordre 4 pour la dérivée première prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{N-1} \\ f'_N \end{bmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Dans le cas de conditions aux limites non-périodiques (Dirichlet, Neumann etc.), l'approche généralement adoptée consiste à utiliser des schémas « décentrés », ne faisant intervenir que des points situés du côté opposé à la limite. Les schémas décentrés alors utilisés sont souvent de même ordre que le schéma utilisé à l'intérieur du domaine afin de conserver une précision homogène sur l'ensemble du domaine de calcul. Par ailleurs, afin de ne pas réduire l'efficacité des stratégies de résolution du système  $\mathcal{A}\mathbf{f}' = \mathcal{B}\mathbf{f}$ , les schémas choisis ne doivent pas augmenter la largeur de bande de la matrice  $\mathcal{A}$  associée aux dérivées de la fonction. La précision formelle souhaitée est donc obtenue en ajustant uniquement le nombre de valeurs de  $f$  considérées. Les dérivées au point  $i = 1$  et  $i = N$  peuvent être calculées selon les relations d'ordre 4 :

$$f'_1 + 3f'_2 = \frac{3}{h} \left( -\frac{17}{18}f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 - \frac{1}{18}f_4 \right) \quad (2.12)$$

$$f'_N + 3f'_{N-1} = \frac{3}{h} \left( -\frac{17}{18}f_N + \frac{1}{2}f_{N-1} + \frac{1}{2}f_{N-2} - \frac{1}{18}f_{N-3} \right) \quad (2.13)$$

L'estimation des dérivées sur l'ensemble du domaine de calcul demande alors de

résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{N-1} \\ f'_N \end{bmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} -\frac{17}{18} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{18} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{18} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On remarquera par ailleurs que les schémas compacts peuvent également être formulés de manière explicite en multipliant la relation 2.10 par l'inverse de la matrice  $\mathcal{A}$  :

$$\mathbf{f}' = \mathcal{C}\mathbf{f} \quad (2.15)$$

où la matrice  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  est une matrice pleine avec une forte prédominance des valeurs autour de la diagonale. Cette formulation présente l'intérêt d'être commune aux schémas compacts et explicites et sera beaucoup utilisée par la suite.

### 3.2.2 Schémas de type combiné

Les schémas de type combiné introduits par Mahesh [13] consistent à estimer les dérivées premières et secondes en un point à partir de la valeur de la fonction, de sa dérivée première et de sa dérivée seconde autour de ce point. Les schémas combinés font donc intervenir les ensembles de points  $\mathcal{J}_0$ ,  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$ . Les valeurs des dérivées premières et secondes associées aux ensembles de points sont naturellement inconnues. Les schémas combinés consistent donc, pour chaque point de ces ensembles, en un système de deux équations auxiliaires :

$$\begin{aligned} F'_i &= \sum_{j \in \mathcal{J}_0^{i,1}} a_{0,j}^{(1)} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^{i,1}} a_{1,j}^{(1)} F'_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^{i,1}} a_{2,j}^{(1)} F_j^{(2)} \\ F_i^{(2)} &= \sum_{j \in \mathcal{J}_0^{i,2}} a_{0,j}^{(2)} f_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^{i,2}} a_{1,j}^{(2)} F'_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^{i,2}} a_{2,j}^{(2)} F_j^{(2)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les dérivées première et seconde sont donc évaluées simultanément, d'où le qualificatif de « combiné ».

Le schéma combiné d'ordre 6 donné dans [13] prend la forme :

$$\begin{aligned} 7F'_{i-1} + 16F'_i + 7F'_{i+1} + h(F''_{i-1} - F''_{i+1}) &= \frac{15}{h}(f_{i+1} - f_{i-1}) \\ 9(F'_{i+1} - F'_{i-1}) - h(F''_{i-1} - 8F''_i + F''_{i+1}) &= \frac{24}{h}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

On remarque que le schéma de Padé 2.8 construit avec les mêmes ensembles de points  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_1$  a une précision formelle de 2 ordres inférieure. L'implication des points de l'ensemble  $\mathcal{J}_2$  permet donc de gagner en précision dans l'estimation effectuée par le schéma. Les schémas de type combiné sont donc particulièrement intéressants dans le cas où l'on souhaite déterminer les dérivées première et seconde d'une quantité. Toutefois, dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à la dérivée première (ou seconde), les schémas de type combiné procèdent à l'estimation inutile de la dérivée seconde (première). L'intérêt de l'utilisation de ce type de schéma est alors beaucoup moins évident, le surplus de précision obtenu se faisant au prix d'un coût numérique deux fois supérieur.

Les dérivées première et seconde sont données par la résolution de ces deux équations pour chaque point  $i$  du domaine de calcul. Ce schéma de calcul peut donc s'exprimer sous forme matricielle en faisant intervenir le vecteur des dérivées première et seconde et celui de la valeur de la fonction en tout point du domaine de calcul :

$$\mathcal{A}[\dots, f'_{i-1}, f''_{i-1}, f'_i, f''_i, f'_{i+1}, f''_{i+1}, \dots] = \mathcal{B}\mathbf{f} \quad (2.18)$$

Par exemple, toujours dans le cas particulier de conditions aux limites périodiques, les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  prennent la forme :

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 7 & -h & & & 7 & h \\ 0 & 8h & 9 & -h & & & -9 & -h \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 7 & h & 16 & 0 & 7 & -h \\ & -9 & -h & 0 & 8h & 9 & -h \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 7 & -h & & & 7 & h & 16 & 0 \\ 9 & -h & & & -9 & -h & 0 & 8h \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f''_1 \\ \vdots \\ f'_i \\ f''_i \\ \vdots \\ f'_N \\ f''_N \end{bmatrix} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 15(f_2 - f_n) \\ 24(f_n - 2f_1 + f_2) \\ \vdots \\ 15(f_{i+1} - f_{i-1}) \\ 24(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) \\ \vdots \\ 15(f_1 - f_{N-1}) \\ 24(f_{N-1} - 2f_N + f_1) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### 3.2.3 Résolution matricielle

Comme mentionné précédemment, les schémas compacts de type Padé et de type combiné (de manière générale, l'ensemble des schémas compacts) peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\mathcal{A}\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{B}\mathbf{f} \quad (2.20)$$

où le vecteur  $\tilde{\mathbf{f}}$  représente les données relatives à la fonction  $f$  estimées par le schéma de calcul. Le vecteur  $\tilde{\mathbf{f}}$  comprend, pour chaque point du domaine de calcul, la dérivée première de la fonction dans le cas d'un schéma de type Padé et les dérivées première et seconde dans le cas d'un schéma combiné.

Le système 2.20 peut être résolu efficacement par la méthode LU qui consiste à décomposer la matrice  $\mathcal{A}$  en une matrice triangulaire inférieure notée  $\mathcal{L}$  et une matrice triangulaire supérieure notée  $\mathcal{U}$ . Le membre de droite est tout d'abord calculé pour un coût équivalent à celui d'un schéma explicite. Le système 2.20 devient alors :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}\tilde{\mathbf{f}}) = \mathcal{B}\mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (2.21)$$

Soit, en posant  $\mathbf{y} = \mathcal{U}\tilde{\mathbf{f}}$  :

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (2.22)$$

La matrice  $\mathcal{L}$  étant une matrice triangulaire inférieure, le vecteur  $\mathbf{y}$  peut être résolu par substitutions successives en partant de sa première valeur, en utilisant la relation de récurrence :

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}_{i,k} y_k \quad (2.23)$$

Cette étape est appelée « étape de la descente ». La solution  $\tilde{\mathbf{f}}$  du système linéaire 2.20 peut alors être obtenue en résolvant le système  $\mathcal{U}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{y}$ . La matrice  $\mathcal{U}$  étant une matrice triangulaire supérieure, le vecteur  $\tilde{\mathbf{f}}$  peut être résolu par substitutions successives en partant de sa dernière valeur et « remontant » selon la relation de récurrence :

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{U_{i,i}} \left( y_i - \sum_{k=i+1}^{i=n} U_{i,k} \tilde{f}_k \right) \quad (2.24)$$

Bien qu'étant une étape assez lourde, la décomposition LU de la matrice  $\mathcal{A}$  peut être réalisée en une seule fois et a un coût numérique négligeable dès lors que le schéma est appliqué un grand nombre de fois. En revanche, les étapes de montée

et de descente de la résolution LU doivent être effectuées à chaque application du schéma et induisent un surcoût numérique par rapport aux schémas explicites basés sur le même ensemble  $\mathcal{J}_0$ .

Le coût numérique des étapes de montée et de descente dépend naturellement de la structure de la matrice  $\mathcal{A}$ . Dans le cas de conditions aux limites non périodiques, la matrice  $\mathcal{A}$  associée au schéma compact de Padé (relation 2.8) est de nature tridiagonale et les matrices  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{U}$  sont de la forme :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & 0 \\ & l_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & l_N & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & 0 \\ & d_2 & u_2 & \\ & & d_3 & u_3 \\ & 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & & d_N \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

La résolution du système 2.14 requiert alors  $(2N, 3N)$  additions et multiplications pour les étapes de montée et de descente de la méthode LU et  $(N, N)$  pour le calcul du produit  $\mathcal{B}f$ , soit au total  $(3N, 4N)$  opérations.

La résolution du schéma de Padé est plus complexe dans le cas périodique du fait de la nature circulante de la matrice  $\mathcal{A}$ . Le système 2.11 peut cependant être résolu efficacement en considérant la matrice  $\mathcal{A}$  comme une perturbation d'une matrice tridiagonale non circulante  $\mathcal{A}'$  :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{u} = [-b, 0, 0, \dots, 0, c]$  et  $\mathbf{v} = [1, 0, 0, \dots, 0, -a/b]$ . Les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement les coefficients de la diagonale inférieure, principale et supérieure de la matrice  $\mathcal{A}$  et valent  $a = 1$ ,  $b = 4$  et  $c = 1$  pour le système 2.11. La résolution du schéma passe alors par la résolution de deux systèmes intermédiaires :

$$\mathcal{A}'\mathbf{y} = \mathcal{B}\mathbf{f} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{A}'\mathbf{q} = \mathbf{u} \quad (2.28)$$

et est donnée par la relation de Sherman-Morrison :

$$\mathbf{f}' = \mathbf{y} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{y}}{1 + \mathbf{v}\mathbf{q}}\mathbf{q} \quad (2.29)$$

On notera que le système 2.28 ne dépend pas des valeurs de la fonction  $f$  et peut par conséquent être résolu en une fois, à l'initialisation du code. Le surcoût induit par le cas périodique réside donc essentiellement dans l'application de la relation 2.29. Dans le cas des schémas compact de type combiné, la résolution LU du système 2.19 est plus coûteuse du fait de la nature hepta-diagonale de la matrice  $\mathcal{A}$  et nécessite d'effectuer  $(15N, 17N)$  opérations [13]. La résolution des schémas compacts implique donc un nombre d'opérations plus important que pour le calcul des dérivées selon un schéma explicite d'ordre 2  $(N, N)$ . Cependant, comme indiqué précédemment, leur sensibilité moindre aux brusques variations permet d'utiliser des maillages plus grossiers ce qui réduit fortement leur coût réel [11].

### 3.3 Schémas optimisés

Les schémas optimisés sont des schémas compacts ou explicites dont certains des coefficients sont dérivés selon une approche différente de l'approche de Taylor, qui consiste à minimiser l'erreur commise dans l'espace de Fourier. Cette approche a notamment été utilisée par Lele pour la dérivation de schémas compacts à très haute précision [11] et appliquée aux schémas explicites par Tam et Webb [12].

L'approche spectrale est basée sur le fait que toute fonction peut être approximée par un développement en série de Fourier :

$$f'_i = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_m \exp(\iota k_m x_i) \quad (2.30)$$

avec  $k_m = \frac{2\pi}{h} \frac{m}{N}$  où  $N$  est le nombre de points dans la direction  $x$ . Il est à noter que cette relation est exacte dans le cas où la fonction  $f$  est une fonction périodique de périodicité  $N$ .

De manière générale, les schémas de calculs peuvent être exprimés selon la forme matricielle explicite  $\tilde{f} = \mathcal{C}f$  où  $\tilde{f}$  représente les estimations réalisées par le schéma. La matrice  $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  est le produit de l'inverse de la matrice  $\mathcal{A}$ , associée à la dérivée première (schéma compact de Padé) ou à la dérivée première et seconde (schéma combiné), par la matrice  $\mathcal{B}$  associée aux valeurs de la fonction. Dans le cas d'un schéma de dérivée première, la dérivée « numérique »  $\frac{\delta f}{\delta x}$  du mode  $f = e^{\iota k x_i}$  s'écrit

donc :

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = \exp(\iota k x_i) \sum_{j=1}^N C_{ij} \exp(\iota k (x_j - x_i)) = \iota k^{(1)} \exp(\iota k x_i) \quad (2.31)$$

où le facteur  $k^{(1)}(kh) = -\iota \sum_{j=1}^N C_{ij} \exp(\iota k h (j - i))$  est le nombre d'onde modifié du schéma de calcul pour le mode  $k$ . Le paramètre  $kh$  est inversement proportionnel à la résolution de la grille pour le mode  $k$  considéré et joue donc un rôle essentiel dans la précision des schémas. Les modes ayant de faibles valeurs  $kh$  comportent un nombre élevé de points par longueur d'onde tandis que les modes  $kh = \pi$  sont très faiblement résolus par la grille, à raison de deux points par longueur d'onde.

La relation 2.31 de la dérivée numérique est analogue à la dérivée exacte  $f' = \iota k f$  et l'erreur commise peut s'exprimer simplement à partir du nombre d'onde modifié normalisé ( $k^{(1)}/k$ ) et de la dérivée exacte :

$$\epsilon(kh) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i - \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = \left( 1 - \frac{k^{(1)}}{k} \right) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \quad (2.32)$$

L'approche spectrale consiste à minimiser l'erreur commise sur une plage de  $kh$   $[0, k_{max}h]$  aussi large que possible. Sa forme la plus simple, utilisée par Lele [11], consiste à imposer une précision parfaite sur  $N_c$  modes répartis convenablement sur la plage souhaitée de façon à obtenir les  $N_c$  contraintes nécessaires à l'obtention des coefficients du schéma :

$$\frac{k^{(1)}(k_m h)}{k_m} = 1, m = 1, \dots, N_c \quad (2.33)$$

Une autre méthode proposée par Tam et Webb [12] consiste à minimiser l'erreur totale commise sur l'intervalle  $[0, k_{max}h]$  :

$$\begin{cases} \int_0^{k_{max}h} \left| 1 - \frac{k^{(1)}}{k} \right|^2 dk \\ \frac{\partial E}{\partial a_m} = 0, m = 1, \dots, N_c \end{cases} \quad (2.34)$$

L'approche spectrale n'est, dans l'absolu, pas plus précise que l'approche standard de dérivation de Taylor mais offre la possibilité de « répartir » la précision sur davantage de modes en augmentant la taille de la fenêtre  $kh$  dans la limite permise par le nombre de points voisins du schéma considéré. Le choix d'une fenêtre d'optimisation petite au regard du nombre de points du schéma permet d'obtenir des schémas proches des schémas standards offrant une excellente précision pour les



modes (très) finement résolus par la grille ( $kh$  petits) et une précision médiocre sur les autres modes. L'élargissement de cette fenêtre offre la possibilité d'augmenter la précision pour les modes moins bien résolus par la grille au prix d'une perte de précision minime pour les  $kh$  plus petits. Cette approche permet donc d'améliorer fortement la couverture spectrale des schémas de calcul et ainsi de pouvoir travailler sur des grilles beaucoup plus grossières.

La plupart des schémas à haute précision proposés par la littérature combinent l'approche spectrale et l'approche de Taylor à travers un jeu de contraintes mixtes. Cette approche permet de garantir une excellente précision pour les modes de  $kh$  réduit en imposant un ordre minimal tout en élargissant sensiblement la couverture spectrale du schéma. À titre d'exemple, le schéma explicite optimisé de Tam et Webb [12] comporte trois coefficients dont deux sont utilisés pour garantir un ordre 4 tandis que le coefficient restant est utilisé pour réduire l'erreur dans l'espace de Fourier.

## 4 Estimation de la qualité d'un schéma

Cette section présente une méthode simple et générique permettant d'évaluer la pertinence des différents schémas de calcul à notre disposition pour la discrétisation des équations de l'écoulement. Cette approche proposée par Sengupta et al. [14] est basée sur une analyse dans l'espace de Fourier et consiste à étudier le comportement des différents modes composant la solution numérique.

Dans un premier temps, la question de la précision d'un schéma de calcul sera abordée indépendamment de toute considération physique. La qualité d'un schéma de calcul n'est pas uniquement déterminée par sa précision et dépend étroitement de son effet sur la physique de l'équation à laquelle celui-ci est appliqué. Une étude du rôle physique des schémas de calcul adoptés pour la discrétisation des termes de convection et de diffusion sera donc réalisée. Enfin, certaines propriétés de la solution numérique telles que la vitesse de groupe seront dégagées afin d'évaluer la stabilité de la résolution numérique ou son respect de la relation de dispersion (critère très important dans le cas d'un écoulement pleinement turbulent).

### 4.1 Précision et nombre d'onde modifié

La mesure de la précision d'un schéma pour un mode de Fourier donné  $e^{ikx}$  a déjà été considérée dans le cas du calcul de la dérivée première à travers la notion de nombre d'onde modifié, introduite lors de la description des schémas optimisés.

Cependant, le critère utilisé pour évaluer la précision d'un schéma dépend naturellement de la nature de l'estimation effectuée (interpolation, dérivée première, ...) et l'on se propose ici d'adopter une approche plus générique.

L'estimation  $\tilde{f}$  effectuée par un schéma aux points  $X_i$  à partir des valeurs de la fonction  $f$  aux points  $x_i$ , peut s'exprimer sous la forme matricielle explicite :

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{C}\mathbf{f}_x$$

La précision du schéma pour le mode  $f = e^{\iota k x}$  peut être évaluée en comparant l'estimation obtenue avec la valeur exacte au point  $X_i$  de la quantité estimée. On commence d'abord par exprimer de manière analytique la valeur estimée par le schéma de calcul à partir de la valeur exacte de la fonction  $f$  au point  $X_i$  en utilisant la relation  $[e^{\iota k x_j} = e^{\iota k X_i} e^{\iota k (x_j - X_i)}]$  :

$$\tilde{f}_{X_i} = \left( \sum_{j=1}^N C_{ij} \exp(\iota k (x_j - X_i)) \right) \exp(\iota k X_i) = \iota^d k^{(d)}(kh) \exp(\iota k X_i) \quad (2.35)$$

où  $d$  correspond à l'ordre de la dérivée estimée par le schéma ( $d = 0$  dans le cas d'une interpolation). La précision du schéma peut alors être évaluée à partir de la quantité complexe  $k^{(d)}(kh)$  :

$$k^{(d)}(kh) = -\iota^d \left( \sum_{j=1}^N C_{ij} \exp(\iota k (x_j - X_i)) \right) \quad (2.36)$$

Dans le cas d'un schéma d'interpolation, la valeur estimée doit être égale à la valeur de la fonction au point  $X_i$  et la précision du schéma est optimale lorsque  $k^{(0)} = 1$ . Le paramètre  $k^{(0)}$  correspond alors à la fonction de transfert  $\mathcal{T}$  du schéma de calcul. Dans le cas d'un schéma de dérivée d'ordre  $d$ , la dérivée exacte d'ordre  $d$  en  $X_i$  est donnée par  $\iota^d k^d e^{\iota k X_i}$  et la précision optimale correspond au cas où  $k^{(d)}/k^d = 1$ . Le paramètre  $k^{(d)}$  est alors analogue au nombre d'onde modifié rencontré pour la dérivée première et pourrait être appelé nombre d'onde modifié d'ordre  $d$ . Par souci de concision, on oubliera généralement de préciser l'ordre de la dérivée associée, celui-ci étant indiqué dans la notation  $k^{(d)}$ . Le rapport  $k^{(d)}/k^d$  sera appelé nombre d'onde modifié normalisé.

À titre d'exemple, la figure 2.4 montre le rapport  $k^{(1)}/k$  des schémas de dérivée première les plus communs en fonction du paramètre  $kh$  dans le cas d'un arrange-

ment *collocated*, où les ensembles de points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$  sont identiques. La ligne pleine correspond au cas idéal  $k = k^{(1)}$  où la dérivée numérique estimée par le schéma est égale à la dérivée analytique. On constate que l'ensemble des schémas fournissent de très bonnes estimations pour des faibles valeurs du paramètre  $kh$  correspondant à un nombre élevé de points par période  $N_{PP} = 2\pi/kh$ , comme on pouvait s'y attendre. En revanche, lorsque le nombre de points par période (N.P.P) diminue, les variations d'un point à un autre du maillage sont brutales et conduisent donc à une mauvaise estimation de la dérivée d'où le décollage observé lorsque  $kh$  augmente. Le schéma de Padé d'ordre 4 (relation 2.8) est le schéma le plus précis et offre une excellente précision jusqu'en  $kh = 1$ . Ce schéma permet donc d'obtenir de très bonnes estimations des dérivées tout en travaillant avec un N.P.P réduit ( $N_{PP} \approx 6$ ). Par la suite, on désignera par *résolution spectrale* la capacité d'un schéma de calcul à produire une bonne estimation de la dérivée jusqu'aux valeurs de  $kh$  les plus élevées.

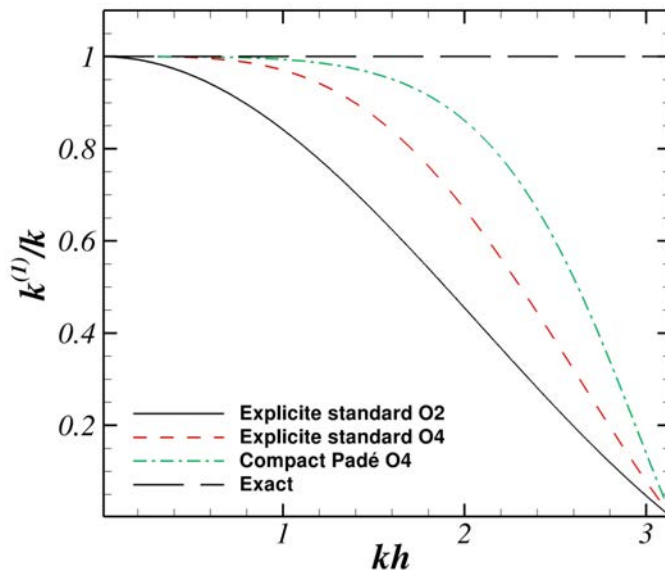


FIGURE 2.4 – Profil de  $k^{(1)}/k$  en fonction du paramètre  $kh$

## 4.2 Influence de la discrétisation spatiale sur la physique

La partie imaginaire du nombre  $k^{(1)}$ , qui s'annule pour les schémas centrés, est non nulle pour les schémas décentrés. Bien que les schémas centrés constituent

l'essentiel des schémas utilisés dans le code de simulation, des schémas compacts décentrés analogues aux relations 2.13 pourront cependant être utilisés aux limites du domaine et il est donc utile de considérer le rôle de la partie imaginaire des schémas sur la physique de la solution numérique.

Considérons tout d'abord l'équation de transport d'une quantité  $f$  dans un milieu diffusif selon la direction  $x$  à la vitesse  $c$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.37)$$

ainsi que sa forme semi-discrétisée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\delta f}{\delta x} = \alpha \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \quad (2.38)$$

La dérivée première numérique de la fonction  $f$  intervenant dans l'équation 2.38 peut s'exprimer à partir des parties réelles et imaginaires du nombre d'onde modifié :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{X_i} &= \iota [\Re\{k^{(1)}\} + \iota \Im\{k^{(1)}\}] e^{\iota k x} \\ &= \frac{\Re\{k^{(1)}\}}{k} [\iota k e^{\iota k x}] + \frac{\Im\{k^{(1)}\}}{k^2} [-k^2 e^{\iota k x}] \end{aligned} \quad (2.39)$$

et peut donc s'écrire à partir des dérivées première et seconde exactes selon la relation :

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{X_i} = \frac{\Re\{k^{(1)}\}}{k} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X_i} + \frac{\Im\{k^{(1)}\}}{k^2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{X_i} \quad (2.40)$$

De manière analogue, la dérivée seconde numérique peut s'exprimer à partir des dérivées première et seconde exactes :

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_{X_i} = \frac{\Re\{k^{(2)}\}}{k^2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{X_i} - \frac{\Im\{k^{(2)}\}}{k} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X_i} \quad (2.41)$$

L'intégration des relations 2.40 et 2.41 dans l'équation semi-discrétisée 2.38 permet d'obtenir :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \tilde{c} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{X_i} = \tilde{\alpha} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{X_i} \quad (2.42)$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= c \left[ \frac{\Re\{k^{(1)}\}}{k} + \frac{\alpha}{c} \frac{\Im\{k^{(2)}\}}{k} \right] \\ \tilde{\alpha} &= \alpha \left[ \frac{\Re\{k^{(2)}\}}{k^2} - \frac{c}{\alpha} \frac{\Im\{k^{(1)}\}}{k^2} \right]\end{aligned}$$

La comparaison de l'équation de transport 2.37 avec l'équation de transport semi-discrétisée 2.42 permet de dégager le rôle physique de la partie imaginaire de  $k^{(1)}$  et  $k^{(2)}$ . La partie imaginaire de  $k^{(2)}$  se trouve associée au terme de convection et influe donc sur la vitesse de propagation du signal. Il introduit donc une certaine dispersion dans la solution numérique. La partie imaginaire de  $k^{(1)}$  est associée au terme de diffusion. On notera que si celle-ci est de même signe que  $c$ , elle réduit la diffusion et peut générer une diffusion effective négative si elle est trop importante, rendant la solution numérique instable. Il faudra donc être particulièrement vigilant quant aux valeurs prises par cette quantité.

### 4.3 Stabilité et respect de la relation de dispersion

Au-delà de la sous-couche visqueuse, située à proximité des parois, l'écoulement est essentiellement gouverné par les termes d'advection et il est utile de s'intéresser aux effets de la discrétisation de ces termes sur la qualité de la solution numérique. Une telle étude n'est malheureusement pas applicable aux équations de Navier-Stokes du fait de l'absence de solution analytique connue. Une approche simple, proposée par Sengutpa [14], est de considérer l'équation d'une onde circulant à la vitesse  $c$  dans un milieu non-dispersif :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.43)$$

On suppose donc que les schémas de calcul ont des effets similaires sur la solution numérique de l'équation modèle 2.43 et sur la solution numérique de l'écoulement. Cette hypothèse forte semble justifiée dans le cas de pas de temps extrêmement petits où le comportement non-linéaire des équations de Navier-Stokes peut être considéré comme une perturbation du cas linéaire. Pour les pas de temps plus élevés utilisés en situation réelle, cette approche peut difficilement être utilisée pour certifier des bonnes propriétés de la solution numérique mais peut trouver sa place en tant qu'étape de validation intermédiaire. Il est en effet difficilement envisageable que des

schémas échouant à résoudre convenablement l'équation 2.43 puissent être adaptés à la résolution des équations de Navier-Stokes de même nature, mais beaucoup plus complexes et seul les schémas permettant d'obtenir des résultats satisfaisants sur l'équation 2.43 pourront être envisagés pour la simulation.

### 4.3.1 Solution analytique et solution numérique

La solution analytique de l'équation modèle 2.43 peut s'écrire, dans l'espace de Fourier :

$$f(x, t) = \int \widehat{f}_k e^{\iota(kx - \omega t)} dk \quad (2.44)$$

Soit, en utilisant les variables discrétisées :

$$f(x_i, n\Delta t) = \int \widehat{f}(k, t) e^{\iota(kx_i)} dk \int \widehat{f}_k e^{-\iota(\omega n\Delta t)} e^{\iota(kx_i)} dk \quad (2.45)$$

où la pulsation  $\omega$  est liée au nombre d'onde et à la vitesse de phase  $c$  par la relation de dispersion  $\omega = kc$ . La solution numérique de l'équation discrétisée en temps et en espace s'exprime de manière analogue :

$$f(x_i, n\Delta t) = \int \widehat{f}_k e^{-\iota(\omega_N n\Delta t)} e^{\iota(kx_i)} dk = \int \widehat{f}_k G^n e^{\iota(kx_i)} dk \quad (2.46)$$

Le paramètre  $G$  appelé facteur d'amplification contrôle l'évolution temporelle de la solution numérique. Dans le cas idéal, la solution numérique est identique à la solution analytique et  $G = e^{-\iota(\omega\Delta t)}$ . L'expression du facteur d'amplification dépend de la méthode d'avancement temporel utilisée. Dans le cas d'un avancement selon la méthode d'Euler explicite, la forme discrétisée de l'équation 2.43 s'écrit :

$$f^{n+1} = Gf^n = f^n + c\Delta t \left( \frac{\delta f}{\delta x} \right)^n \quad (2.47)$$

et le facteur d'amplification s'obtient naturellement en utilisant l'expression 2.36 de la dérivée numérique à partir du nombre d'onde modifié  $k^{(1)}$  :

$$G = 1 + \iota ck^{(1)} \Delta t \quad (2.48)$$

La pulsation  $\omega_N$  est l'équivalent de la pulsation  $\omega$  de la solution analytique et s'exprime de manière analogue à partir du nombre d'onde  $k$  et de la vitesse de phase  $c_N$  de la solution numérique :

$$\omega_N = kc_N \quad (2.49)$$

La vitesse de phase numérique  $c_N(kh, \omega\Delta t)$  ainsi que le facteur d'amplification  $G(kh, \omega\Delta t)$  dépendent naturellement de la résolution spatiale et temporelle du mode considéré, c'est à dire du produit  $kh$  pour la résolution spatiale et du produit  $\omega\Delta t = kc\Delta t$  pour la résolution temporelle, et tendent vers la solution analytique  $c_N = c$  lorsque  $kh \rightarrow 0$  et  $\omega\Delta t \rightarrow 0$ .

### 4.3.2 Stabilité

La stabilité de la solution peut être évaluée par la norme du facteur d'amplification  $|G|$ . La solution numérique est stable lorsque  $|G| = 1$ , c'est à dire lorsque l'amplitude des modes n'évolue pas d'une itération à l'autre. Les modes caractérisés par  $|G| > 1$  voient leur amplitude augmenter de manière continue et sont donc instables tandis que les modes caractérisés par  $|G| < 1$  sont progressivement amortis jusqu'à disparaître de la solution numérique. Il est donc important de veiller à ce que la norme du facteur d'amplification soit le plus proche possible de 1 de façon à garantir la stabilité et la conservation des modes.

A titre d'illustration, on peut analyser brièvement la figure 2.5, tirée de Sengupta et al. [15], qui montre  $|G|$  dans le plan  $(kh - \omega\Delta t)$  dans le cas où l'avancement temporel est assuré par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et la discrétisation spatiale est effectuée selon une différence finie centrée d'ordre 2. On constate que la solution est instable pour les grandes valeurs de  $\omega\Delta t$  ( $|G| = 1.5$ ). En revanche, la solution numérique est caractérisée par un facteur d'amplification  $|G|$  très proche de 1 pour  $\omega\Delta t < 1$  et conserve donc très bien l'amplitude de l'onde initiale d'une itération à l'autre. Ce dernier point est un critère important si l'on veut conserver l'énergie totale du système.

### 4.3.3 Respect de la relation de dispersion

La vitesse de phase  $c$  intervenant dans l'équation d'onde est identique pour l'ensemble des modes  $k$  de la solution. La vitesse de groupe  $V_g$  de la solution exacte, définie par :

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (2.50)$$

est donc strictement égale à la vitesse de phase. La vitesse de phase et la vitesse de groupe sont toutes deux des propriétés fondamentales de l'équation d'onde et doivent évidemment être convenablement reproduites dans la solution numérique.

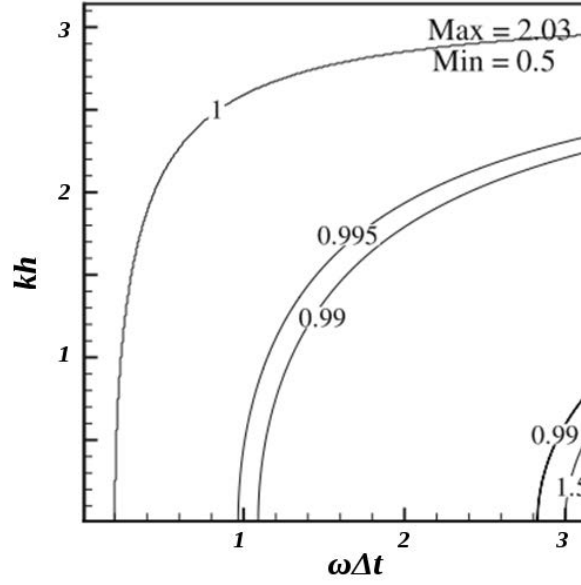


FIGURE 2.5 – Facteur d’amplification dans le plan  $(kh - \omega\Delta t)$  dans le cas où l’avancement temporel est effectué avec un schéma de Runge-Kutta d’ordre 4 combiné à un schéma de différence finie centrée d’ordre 2 pour la discrétisation spatiale. La figure est tirée de Sengupta et al. [15]

Les conditions :

$$\begin{aligned} \frac{c_N}{c} &\approx 1 \\ \frac{V_g}{c} &\approx 1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

doivent donc être satisfaites pour les principaux modes de la solution numérique. La capacité de la solution numérique à satisfaire simultanément ces deux conditions est appelée propriété DRP dans la littérature (pour l’anglais Dispersion Relation Preservation). La vitesse de phase normalisée  $c_N/c$  s’obtient directement à partir du facteur d’amplification  $G$  selon la relation :

$$\frac{c}{c_N} = \frac{\arg(G)}{kc\Delta t} = \frac{\arg(G)}{\omega\Delta t} \quad (2.52)$$

La vitesse de groupe normalisée est alors donnée par :

$$\frac{V_g}{c} = \frac{c_N}{c} + \frac{k^2}{\omega} \frac{\partial c_N}{\partial k} \quad (2.53)$$

De manière générale, on estime que la solution numérique comporte de bonnes



propriétés de DRP si la vitesse de phase et la vitesse de groupe normalisées sont comprises entre 0.95 et 1.05. À titre d'exemple, la figure 2.6 présente la vitesse de groupe de la solution numérique obtenue dans le cas d'un avancement temporel assuré par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et d'une discrétisation spatiale effectuée selon une différence finie centrée d'ordre 2. On constate que la zone du plan  $(kh - \omega\Delta t)$  correspondant à des bonnes propriétés DRP est beaucoup plus réduite que celle jugée satisfaisante pour le facteur d'amplification. Le critère de DRP nous oblige donc, dans ce cas précis, à réduire la taille  $h$  du maillage de façon à rester dans la zone hachurée quelques soient les modes apparaissant dans la solution numérique.

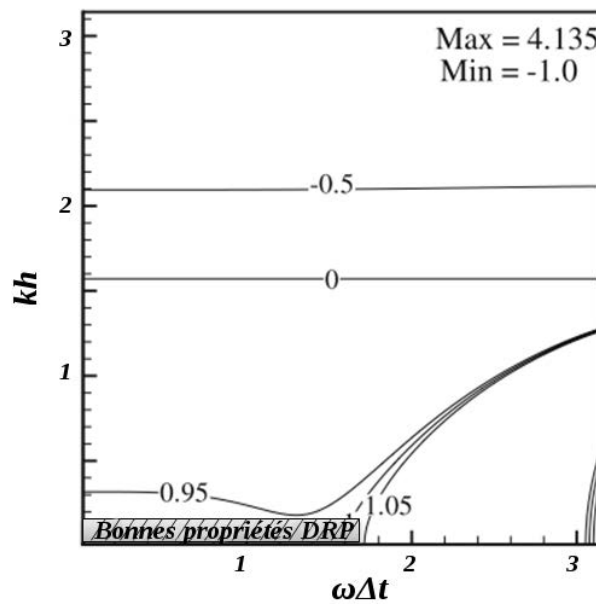


FIGURE 2.6 – Iso-courbes de la vitesse de groupe dans le plan  $(kh - \omega\Delta t)$  dans le cas où l'avancement temporel est effectué avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 combiné à un schéma de différence finie centrée d'ordre 2 pour la discrétisation spatiale. La figure est tirée de Sengupta et al. [15]

## 5 Problématiques liées à l'utilisation de schémas à haute précision

### 5.1 Amortissement des oscillations factices

Dans le cas d'écoulement turbulents, les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes jouent un rôle considérable et d'intensité supérieure aux termes de

diffusion. Or les termes non-linéaires sont le produit de vitesses et génèrent donc des modes de très hautes fréquences qui n'appartiennent pas à la gamme de fréquences résolues par le maillage. Dans le domaine de calcul discrétisé, ces modes sont interprétés comme des modes de plus basses fréquences appartenant à la gamme de fréquences résolues. Ce phénomène d'aliasing propre aux termes non-linéaires introduit des oscillations non physiques indésirables dans la solution numérique pouvant compromettre sa stabilité.

En pratique, les grilles utilisées dans la littérature, et dans ce travail, sont suffisamment bien résolues et ne sont pas affectées par ce problème, les modes non résolus par la grille représentant une portion infime de l'énergie totale. Toutefois, l'utilisation d'une grille grossière permet d'effectuer des économies substantielles en temps de calcul sur des simulations ne nécessitant pas une précision optimale. Par exemple, les simulations présentées dans cette thèse ont été réalisées sur des grilles fines à partir d'un champ initial turbulent, obtenu sur des grilles plus grossières afin d'accélérer la transition d'un profil de Poiseuille à l'état turbulent et réduire ainsi d'un facteur 8 le coût de cette étape. Dans ce cas, l'utilisation d'approche de réduction de l'aliasing est fortement recommandée afin d'obtenir un champ turbulent initial le plus précis possible.

Cette section présente les différentes options à notre disposition pour limiter l'apparition d'oscillations numériques dans la solution numérique finale ainsi que les schémas de calcul envisageables pour chacune d'elles.

### 5.1.1 Origine des oscillations factices

On considère un domaine de calcul à une dimension comportant  $N$  points uniformément répartis sur une longueur  $L$ . On s'intéressera durant cette partie à l'expression du produit de deux fonctions  $f$  et  $g$  dans la base de Fourier afin de mettre en évidence l'origine des oscillations factices induites par la discrétisation des termes non-linéaires. Les valeurs des fonctions  $f$  et  $g$  en un point  $i$  du domaine de calcul peuvent être exprimées ainsi :

$$\begin{cases} f_i = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_n e^{ik_n x_i} \\ g_i = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \hat{g}_m e^{ik_m x_i} \end{cases} \quad (2.54)$$

Dans ces expressions, le nombre d'onde  $k_n$  du mode  $n$  est donné par  $k_n = n \frac{2\pi}{L}$ .

Les modes les élevés pouvant être résolus dans le domaine de calcul sont donnés par les bornes des sommes. Les nombres d'ondes de ces modes extrêmes sont donc donnés par  $k_{min} = \frac{2\pi}{L}(-N/2 + 1)$  et  $k_{max} = \frac{2\pi}{L}(N/2)$ . Les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes sont obtenus par dérivation des produits de vitesses. On s'intéresse donc au produit des fonctions  $f$  et  $g$  :

$$f_i g_i = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_n \hat{g}_m e^{i(k_n+k_m)x_i} \quad (2.55)$$

Les modes du produit pour lesquels  $k_{min} \leq (k_n + k_m) \leq k_{max}$  sont naturellement correctement résolus dans le domaine de calcul. En revanche, les modes dont le nombre  $k$  est en dehors de cette plage ne pourront être restitués dans l'espace discrétisé et apparaîtront comme des modes de nombre d'onde inférieur produisant les oscillations factices observées. La figure 2.7 montre le mode effectif  $(k_n + k_m)^\diamond$  associé à chaque mode  $(k_n + k_m)$ .

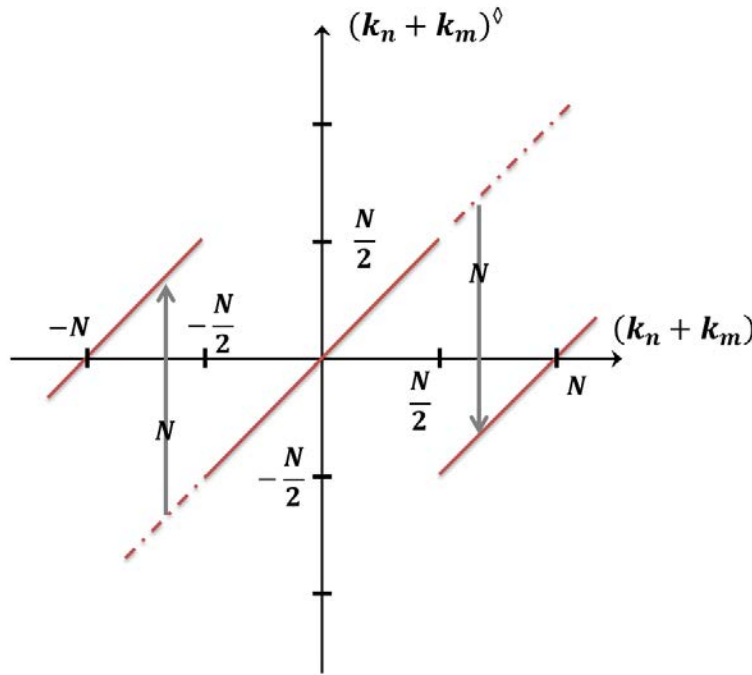


FIGURE 2.7 – Nombre d'onde effectif du produit de deux harmoniques en fonction du nombre d'onde réel

Les valeurs numériques du produit de fonctions et sa dérivée sont donc données par :

$$\begin{aligned}
 f_i g_i &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \widehat{f}_n \widehat{g}_m e^{\iota(k_n+k_m)^\diamond x_i} \\
 \frac{\partial f_i g_i}{\partial x} &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \iota(k_n + k_m)^\diamond \widehat{f}_n \widehat{g}_m e^{\iota(k_n+k_m)^\diamond x_i}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

La présence ou non d'oscillations factices dans la solution dépend étroitement de la résolution spectrale du schéma de calcul employé. Du fait de leur faible résolution spectrale, les schémas explicites imposent de choisir un maillage raffiné afin que la valeur maximale de  $kh$  soit relativement petite devant  $\pi$ . Les ondes harmoniques composant la solution sont donc de fréquence nettement inférieure à la fréquence maximale pouvant être résolue sur le maillage définie par  $kh = \pi$ . Les termes non-linéaires ne produisent donc aucune fréquence (ou peu) ne pouvant pas être résolue. Par conséquent, les schémas explicites d'ordre réduit n'introduisent pas d'oscillations factices. En revanche, la situation est différente pour les schémas compacts ou explicites optimisés qui, du fait de leur résolution spectrale accrue, sont appliqués sur des maillages moins raffinés. L'utilisation de schémas à haute précision requiert donc de mettre en place des mécanismes d'amortissement des oscillations factices afin de garantir au mieux la stabilité de la simulation.

### 5.1.2 Formulation des termes non-linéaires : utilisation de la forme skew-symmetric

Les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes représentés ici par la dérivée  $\frac{\partial fg}{\partial x}$  peuvent être exprimés de différentes manières, toutes équivalentes d'un point de vue analytique, dont l'impact sur la présence d'oscillations factices dans la solution numérique mérite d'être étudié. Cette étude a déjà été menée par Blaisdell et al. [16] et on se propose ici d'en résumer les grandes lignes.

Toutes les formes de discrétisation existantes peuvent être exprimées au travers d'un paramètre  $\alpha$  compris entre 0 et 1 :

$$\frac{\partial fg}{\partial x} = \alpha \frac{\partial fg}{\partial x} + (1 - \alpha) \left( f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \tag{2.57}$$

La valeur  $\alpha = 1$  correspond à la forme classique dite « conservative », la valeur  $\alpha = \frac{1}{2}$  correspond à la forme « skew-symmetric » et la valeur  $\alpha = 0$  correspond à la forme non-conservative. Il est cependant important de préciser que toutes ces formes

se distinguent seulement par leur nomenclature et sont rigoureusement équivalentes d'un point de vue analytique.

Après décomposition dans l'espace de Fourier de la relation 2.57, on obtient l'expression de la valeur numérique des termes non-linéaires en fonction de  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i g_i}{\partial x} &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \iota \left[ \alpha (k_n + k_m)^\diamond + (1 - \alpha) (k_n + k_m)^\diamond \right] \widehat{f}_n \widehat{g}_m e^{\iota(k_n + k_m)^\diamond x_i} \\ &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \iota k^\diamond \widehat{f}_n \widehat{g}_m e^{\iota(k_n + k_m)^\diamond x_i} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Le nombre d'onde équivalent est donné par la relation  $k^\diamond = \alpha (k_n + k_m)^\diamond + (1 - \alpha) (k_n + k_m)^\diamond$ . La figure 2.8 donne la valeur du nombre d'onde équivalent en fonction de  $k_n + k_m$ . Tout d'abord, la forme non-conservative est à proscrire. En effet, le nombre d'onde équivalent associé à cette forme est significatif quel que soit la fréquence des modes non résolus. La solution numérique sera donc fortement dégradée par les oscillations factices imputables à ces modes. Concernant les formes conservatives et skew-symmetric, on préférera la forme skew-symmetric qui annule les oscillations factices dues aux modes situés à proximité de la plage de résolution  $[-N/2 + 1, N/2]$ . En effet, ces modes sont obtenus par le produit de deux modes de fréquences intermédiaires (ou par le produit d'un mode à basse fréquence et d'un mode à haute fréquence) qui sont fortement représentés, en supposant que le maillage est suffisamment fin et donc adapté au problème étudié. La forme de type skew-symmetric est donc celle qui produit le moins d'oscillations factices et qui garantit au mieux la stabilité de la solution numérique.

L'utilisation de la forme skew-symmetric permet d'éliminer, partiellement, les oscillations factices en amont et présente donc l'intérêt de n'avoir aucun effet sur l'énergie de l'écoulement. Toutefois, il est primordial de vérifier les qualités attendues de cette forme au travers de simulations afin de s'assurer que les oscillations factices résiduelles ont un effet limité sur la qualité et la stabilité de la solution. La figure 2.9 montre les spectres de l'énergie d'un écoulement obtenu pour les différentes formes de discrétisation étudiées ici. Ces résultats ont été obtenus par LES (Large Eddy Simulation) sur un maillage de  $32 \times 32$  et sont comparés à ceux obtenus par DNS sur un maillage de  $128 \times 128$  (Blaisdell et al. [16]). La faible résolution du maillage est particulièrement propice aux oscillations factices et est donc idéale pour cette étude. La figure montre que le spectre obtenu à partir de la forme skew-symmetric reste

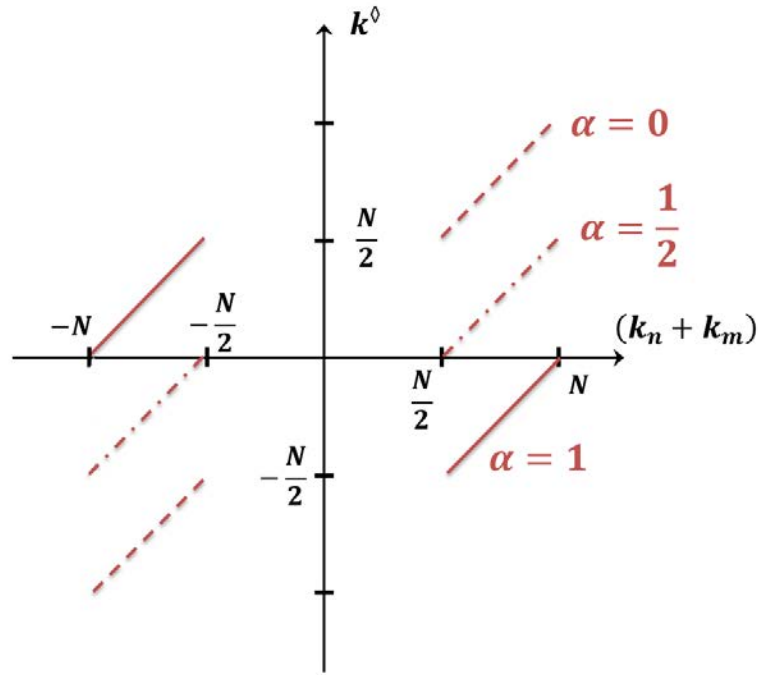


FIGURE 2.8 – Nombre d'onde modifié  $k^\diamond$  associé à différentes formes de discrétisation

très proche du « véritable » spectre obtenu par DNS. En revanche, pour les autres formes de discrétisation, on observe un décollement assez net des courbes de celles du cas DNS. Ce décollement est une conséquence directe des oscillations factices, peu (ou pas du tout) éliminées par ces deux approches.

Le cas des écoulements à grand nombre de Reynolds qui nous occupe a également été considéré par Blaisdell [16] afin d'étudier l'effet des différentes formes de discrétisation sur la stabilité de la solution. Les simulations conduites avec les formes conservative et non conservative se sont montrées instables et n'ont pas pu être menées à terme tandis que celles conduites avec la forme skew-symmetric ont pu aboutir à des résultats proches de l'expérience.

Enfin, malgré son intérêt évident pour la réduction des oscillations factices, la forme skew-symmetric a un coût numérique relativement élevé. En effet, celle-ci requiert l'évaluation de deux dérivées supplémentaires par terme non-linéaire ainsi discrétisé que la forme conservative. Cette approche ne sera donc pas utilisée dans la suite de ce travail.

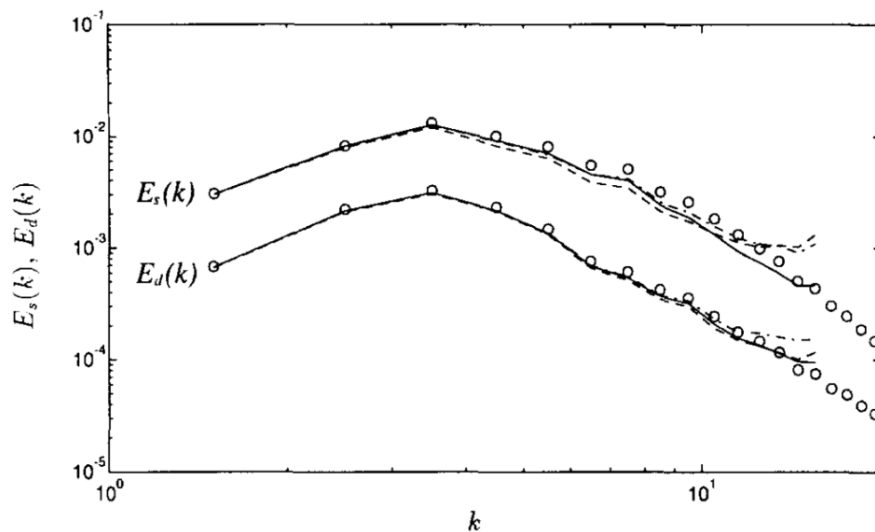


FIGURE 2.9 – Densité spectrale du champ de vitesse décomposée en sa partie solénoïdale  $E_s(k)$  et irrotationnelle  $E_d(k)$ . DNS ( $\circ \circ$ ), forme skew-symmetric (—), forme conservative (---), forme non-conservative (- · -). La figure est tirée de Blaisdell et al. [16]

### 5.1.3 Utilisation de schémas décentrés

La section 4.2 dédiée à l'étude de l'influence des schémas de calcul sur la solution numérique a permis de montrer que la partie complexe du nombre d'onde modifié  $k^{(1)}$  associé au schéma de calcul de la dérivée première pouvait influencer sur la dissipation. Une approche souvent employée dans la littérature [17, 18, 19] consiste donc à employer des schémas, dits décentrés, dont le nombre d'onde modifié comporte une partie imaginaire susceptible d'amortir les oscillations factices.

**Décentrage d'un schéma** On désigne par schéma décentré, un schéma dont les coefficients sont de poids plus important d'un côté du point d'intérêt et qui privilégie donc les points de ce côté dans son estimation. Par exemple, un schéma impliquant les valeurs aux points  $i + 1$ ,  $i + 2$  et  $i + 3$  pour le calcul de la dérivée au point  $i$  est un schéma décentré vers la droite. Une manière simple permettant d'obtenir un schéma décentré est d'ajouter un terme de dissipation (dérivée d'ordre pair) à l'estimation de la dérivée produite par un schéma centré [14, 20] :

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\text{décentré}} = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\text{centré}} + \eta h^{2n-1} \left. \frac{\delta^{2n} f}{\delta x^{2n}} \right|_{\text{centré}} \quad (2.59)$$

Le paramètre  $\eta$  définit « l'intensité » et la direction du décentrage effectué. Par

exemple, le schéma explicite d'ordre 1 décentré vers la droite est obtenu à partir du schéma explicite et centré d'ordre 2 par ajout d'un terme de dissipation du second ordre estimé selon un schéma centré d'ordre 2 ( $n = 1$  et  $\eta = 1/2$ ) :

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\text{décentré}} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \frac{1}{2}h \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (2.60)$$

Il est important de préciser que le signe du coefficient central (au point  $i$ ) et celui de la somme des coefficients aux points voisins du schéma de dissipation dépend de la parité de  $n$ . Par exemple, pour le schéma de dérivée seconde ( $n = 1$ ) d'ordre 2 de coefficients  $[1, -2, 1]$ , le coefficient central vaut -2 et la somme des coefficients aux points voisins est égale à +2. Le signe du coefficient central (+6) et de la somme des autres termes (-6) s'inverse pour le schéma de dérivée quatrième ( $n = 2$ ) d'ordre 2 de coefficients  $[1, -4, 6, -4, 1]$ . Il en résulte que dans le cas où  $n$  est impair, le cas  $\eta > 0$  revient à renforcer les coefficients positifs du côté droit du schéma et correspond à un décentrage vers la droite, le cas  $\eta < 0$  à un décentrage vers la gauche. À l'inverse, dans le cas où  $n$  est pair, le cas  $\eta > 0$  renforce les coefficients négatifs du côté gauche et correspond à un décentrage vers la gauche, le cas  $\eta < 0$  à un décentrage vers la droite.

Dans le cas d'un écoulement turbulent (dominé par la convection), la stabilité d'un schéma décentré dépend étroitement de la direction de propagation du flux et peut être évaluée à partir de l'étude du nombre d'onde modifié (voir section 4.2). Dans le cas d'un schéma décentré obtenu selon la relation 2.59 :

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{\text{décentré}} = \frac{k_{\text{décentré}}^{(1)}}{k} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{k_{\text{centré}}^{(1)}}{k} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{k_{\text{centré}}^{(2n)}}{k^{2n}} \eta h^{2n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}} \quad (2.61)$$

La dérivée  $\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = (\iota k)^{2n-1} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.62)$$

On obtient finalement l'expression du nombre d'onde modifié associé au schéma décentré :

$$\frac{k_{\text{décentré}}^{(1)}}{k} = \left( \frac{k_{\text{centré}}^{(1)}}{k} + (\iota k h)^{2n-1} \eta \frac{k_{\text{centré}}^{(2n)}}{k^{2n}} \right) \quad (2.63)$$

D'après la relation 2.42, la stabilité du schéma impose que la partie imaginaire du nombre d'onde modifié soit de signe opposé à celui de la vitesse de propagation du flux  $c$ . La relation ci-dessus nous apprend que la direction du schéma décentré



(donnée par  $\eta$ ) satisfaisant cette condition de stabilité peut être déduite facilement à partir de  $n$ . Par exemple, si on considère le cas  $n$  impair et  $c > 0$  (flux se déplaçant vers la droite), la partie imaginaire du nombre d'onde modifiée est négative seulement si  $\eta$  l'est également. Le schéma devra donc nécessairement être décentré vers la gauche. À l'inverse, dans le cas où  $n$  est pair et  $c > 0$ , la valeur de  $\eta$  doit être positive et le schéma devra également être décentré vers la gauche. Ainsi l'orientation du décentrage d'un schéma est uniquement imposée par le signe de la vitesse  $c$ . Le schéma utilisé devra être décentré vers la gauche pour  $c > 0$  et vers la droite pour  $c < 0$ . Enfin, on notera que le nombre d'onde modifié du schéma décentré obtenu a la même partie réelle que le celui du schéma centré d'origine. La précision n'est donc pas affectée par le décentrage.

**Influence sur les oscillations factices** Du fait de leur dissipation intrinsèque, les schémas décentrés obtenus selon la relation 2.59 ou selon une logique similaire peuvent être utilisés pour l'estimation des termes non-linéaires afin de réduire les oscillations factices. En effet, d'après la relation 2.63, la partie imaginaire du nombre d'onde modifié augmente avec le nombre  $kh$  et cela d'autant plus que l'ordre  $2n$  du terme dissipatif ajouté est élevé. Ainsi, la valeur  $\eta$  peut être déterminée afin d'obtenir une dissipation numérique négligeable pour les modes correctement résolus par le schéma, et significative pour les modes associés aux oscillations factices ( $kh$  élevé). L'utilisation de schémas décentrés (que l'on désignera par « approche décentrée ») peut donc réduire sensiblement l'intensité des oscillations factices et ainsi contribuer à stabiliser la solution numérique.

À titre d'illustration, la figure 2.10 montre le profil du terme de dissipation induit par l'utilisation d'un schéma décentré pour différentes valeurs  $\eta$  et  $n$ . La quantité  $s$  correspond au seuil en-deçà duquel l'effet de la dissipation induite sur la solution numérique peut être négligé. Par ailleurs, afin de resituer le problème dans le contexte de l'élimination des oscillations factices, la zone associée aux modes de la fonction  $f$  ou  $g$ , celle correspondant au produit de  $f$  et  $g$  et celle entachée par les oscillations factices sont également indiquées. Dans l'exemple considéré ici, la dissipation ajoutée dans les cas 1 et 2 présente des caractéristiques satisfaisantes et ne devient significative (supérieure à  $s$ ) que dans la zone impactée par les oscillations factices ( $kh > 2.5$ ). Ces dernières sont plus efficacement réduites dans le cas 2 du fait de l'ordre plus élevé du terme dissipatif ajouté ( $2n = 8$ ). Les paramètres du cas 3 ( $\eta = s/5, 2n = 4$ ) sont en revanche inadaptés, la dissipation ajoutée étant effective à partir de  $kh = 2$ , bien avant la zone associée aux oscillations factices : le schéma

décentré n'est pas assez sélectif et risque donc d'éliminer certaines composantes physiques des termes non-linéaires.

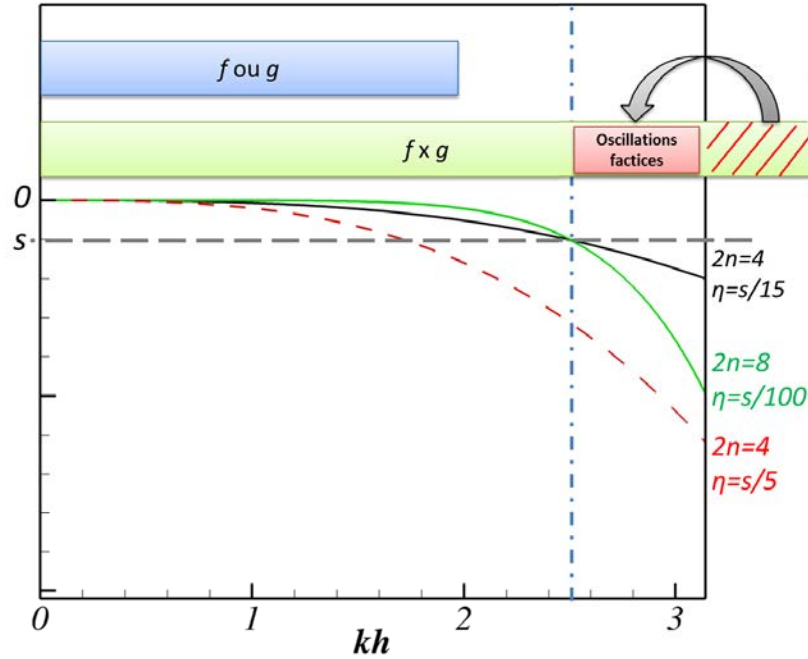


FIGURE 2.10 – Profils du terme dissipatif ajouté pour différentes valeurs de  $\eta$  et  $n$  (relation 2.59). Cas 1 (en noir) :  $2n = 4, \eta = s/15$ . Cas 2 (en vert) :  $2n = 8, \eta = s/100$ . Cas 3 (en rouge) :  $2n = 4, \eta = s/5$ . La valeur  $s$  est le seuil au-delà duquel l'effet de la dissipation devient significatif

**Décomposition du flux** Comme indiqué précédemment, il est important de veiller à ce que l'orientation vers la droite ou vers la gauche d'un schéma décentré est conforme avec le signe de la vitesse de façon à ne pas introduire de dissipation « négative », nuisible à la stabilité de la solution. On considère à nouveau l'équation d'onde :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Le terme de convection doit être discrétisé par un schéma décentré vers la gauche si la vitesse  $c$  est positive et vers la droite si la vitesse  $c$  est négative. L'équation d'onde ainsi discrétisée peut s'écrire sous une forme générique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + c^- \frac{\delta_d f}{\delta x} + c^+ \frac{\delta_g f}{\delta x} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\delta_d F^-}{\delta x} + \frac{\delta_g F^-}{\delta x} = 0 \\ c^+ &= \max(0, c) \quad c^- = \min(0, c) \end{aligned} \quad (2.64)$$

où  $\delta_g f / \delta x$  et  $\delta_d f / \delta x$  représentent respectivement les estimations de la dérivée première selon des schémas décentrés vers la gauche ou vers la droite. Dans cette équation, le flux  $F = cf$  a été décomposé en une partie négative  $F^- = c^- f$  et une partie positive  $F^+ = c^+ f$ , chaque partie étant discrétisée par le schéma décentré associé (orienté vers la droite ou vers la gauche). On notera que le flux positif est nul lorsque le flux négatif est non nul et inversement.

La décomposition de flux peut également être effectuée dans le cas plus général d'un système hyperbolique :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathcal{M} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.65)$$

où le vecteur  $\mathbf{Q} = [q_a, q_b, q_c, \dots]^T$  représente les quantités de l'écoulement à résoudre et  $\mathcal{M} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$  la matrice associée au jacobien du vecteur des flux  $\mathbf{F}$ . La décomposition des flux consiste alors à décomposer la matrice  $\mathcal{M}$  en deux parties et conduit à l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{M}^+ \mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{M}^- \mathbf{Q})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^+}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^-}{\partial x} = 0 \quad (2.66)$$

Le lecteur intéressé par la détermination des matrices  $\mathcal{M}^-$  et  $\mathcal{M}^+$  pourra se référer à l'ouvrage de Lomax et al. [21] qui propose une description détaillée des approches de décomposition de flux appliquées au cas général d'un système hyperbolique. Il est important de préciser que dans le cas général, les composantes  $\mathbf{F}^-$  et  $\mathbf{F}^+$  ne s'excluent pas mutuellement et  $\mathbf{F}^- \neq 0$  n'implique pas  $\mathbf{F}^+ = 0$  à la différence du cas de l'équation d'onde. L'utilisation de l'approche décentrée pour les équations de Navier-Stokes nécessite donc d'effectuer deux estimations pour chaque terme de convection, l'une décentrée à droite et l'autre décentrée à gauche, et est donc relativement coûteuse.

**Quelques schémas décentrés intéressants** On se propose ici de présenter deux schémas décentrés remarquables proposés dans la littérature, retenus pour leur capacité à éliminer les oscillations factices, leur coût numérique, leur précision et leurs

bonnes propriétés DRP. Le schéma proposé par A.K. De et V. Eswaran [22], qui sera ultérieurement désigné par la lettre N, a été choisi pour son excellente précision mais induit un coût numérique relativement important du fait de sa nature penta-diagonale (la largeur de bande de la matrice  $\mathcal{A}$  est de 5). Le schéma de Zhong [23], dénoté Z ci-après, est un compromis intéressant entre précision et coût numérique. Le lecteur intéressé par l'expression de ces schémas est invité à se référer à la littérature [22, 23].

La figure 2.11 montre le profil des parties réelles et imaginaires de  $k^{(1)}$  pour les schémas N et Z considérés. Afin d'illustrer la supériorité de ces schémas, la figure propose également les courbes d'autres schémas décentrés (de nature explicite). Comme indiqué précédemment, le schéma décentré N possède une très grande précision jusque dans les modes de nombre d'onde élevé. Par ailleurs, la partie imaginaire de ces schémas ne devient significative que pour des  $kh$  relativement élevés. Les schémas présentés ici possèdent donc une bonne sélectivité et devraient donc avoir un effet relativement limité sur les composantes physiques de l'écoulement.

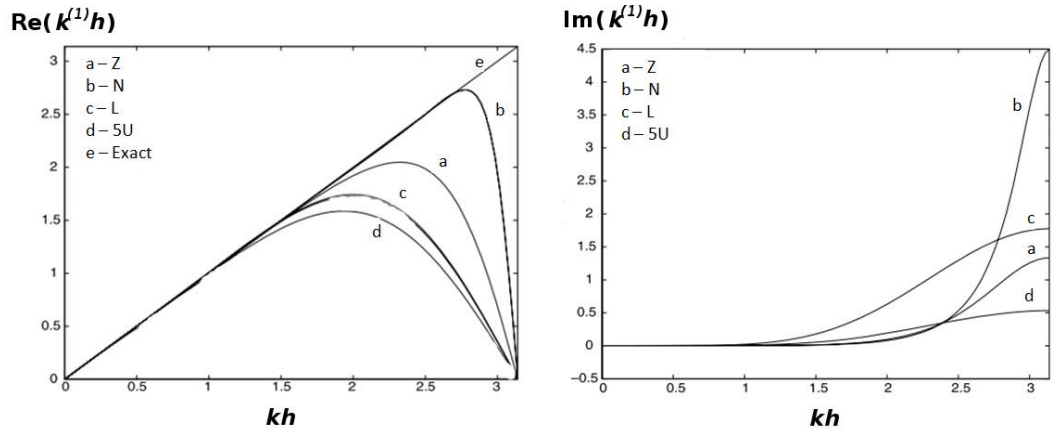


FIGURE 2.11 – Profils du nombre d'onde modifié pour les schémas N et Z et quelques schémas témoins. La figure est tirée de [22]

Enfin, la figure 2.12 montre les propriétés DRP de ces schémas lorsqu'ils sont appliqués à l'équation d'onde, avancée temporellement selon la méthode d'Euler. Les zones du plan correspondant à une erreur sur la vitesse de groupe inférieure à 5% sont grisées. On remarque que le schéma décentré N possède de loin les meilleures propriétés DRP tandis que le schéma Z et L présentent des qualités DRP équivalentes.

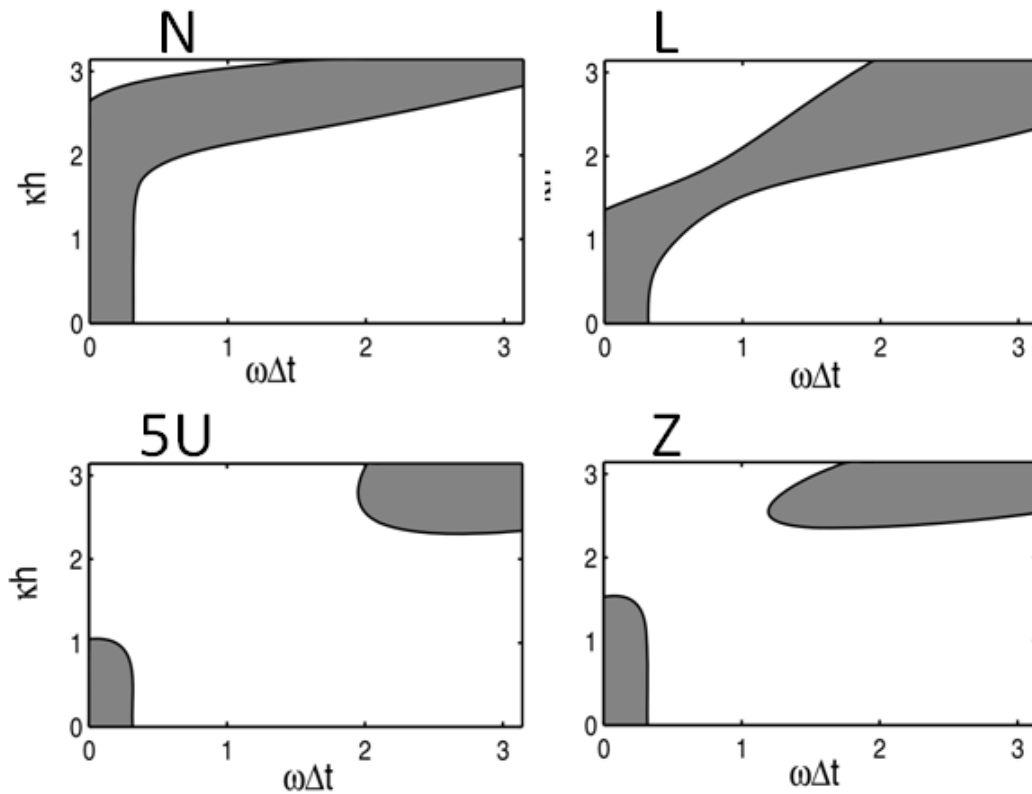


FIGURE 2.12 – Vitesse de groupe normalisée  $V_g/c$  des schémas N et Z et de quelques schémas témoins combinés avec un avancement temporel selon le schéma d'Euler explicite d'ordre 1. La figure est tirée de [22]

#### 5.1.4 Application d'un filtre

Une autre approche consiste à filtrer la solution numérique afin d'en éliminer les modes de fréquence élevée affectés par les oscillations factices. L'application d'un filtre à chaque itération temporel, pour chaque terme non-linéaire, induit un surcoût numérique équivalent à celui d'une discrétisation selon la forme skew-symmetric. Le surcoût réel est cependant souvent largement inférieur, le filtrage n'étant généralement pas appliqué à chaque itération.

#### Schémas de filtrage et fonction de transfert

Les schémas de filtrage sont des schémas de calcul dont l'effet est d'éliminer certains modes composant la fonction  $f$  à laquelle ils sont appliqués. De manière générale, les variantes filtrées  $\tilde{f}$  et non filtrées de la fonction  $f$  sont reliées par la relation

matricielle  $\mathcal{A}\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{B}\mathbf{f}$ , soit :

$$\sum_{j=0}^N a_{ij} \tilde{f}_j = \sum_{j=0}^N b_{ij} f_j \quad (2.67)$$

où  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont les coefficients des matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . En effectuant une décomposition des fonctions  $\tilde{f}$  et  $f$  dans l'espace de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \hat{\tilde{f}}_m e^{\iota k_m x_i} \\ f_i &= \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} \hat{f}_m e^{\iota k_m x_i} \end{aligned} \quad (2.68)$$

La fonction de transfert du schéma définit l'effet du filtrage pour un mode  $f = e^{\iota k x}$  donné et correspond au ratio  $\tilde{f}/f$ . La fonction de transfert peut donc s'écrire, à partir de la relation 2.67 :

$$\mathcal{T}_i(kh) = \frac{\sum_{j=0}^N b_{ij} e^{\iota k(x_j - x_i)}}{\sum_{j=0}^N a_{ij} e^{\iota k(x_j - x_i)}} \quad (2.69)$$

Les schémas de filtrage appliqués à la solution numérique afin d'éliminer les oscillations factices devront avoir une fonction de transfert sélective, nulle pour les modes  $k$  correspondant aux oscillations factices ( $kh$  élevé) et égale à 1 sur le reste du spectre.

### Dérivation d'un schéma de filtrage

Pour simplifier, on considère à présent une expression moins générique des schémas de filtrage, décrivant les schémas de filtrage de Padé, fréquemment utilisés dans la littérature :

$$\alpha \tilde{f}_{i-1} + \tilde{f}_i + \alpha \tilde{f}_{i+1} = \sum_{n=0}^M \frac{a_n}{2} (f_{i+n} + f_{i-n}) \quad (2.70)$$

Le paramètre  $\alpha$  est un paramètre libre à partir duquel seront exprimés les coefficients  $a_n$ . La fonction de transfert du schéma considéré s'écrit :

$$\mathcal{T}_i(kh) = \frac{\sum_{j=0}^N \frac{a_{|j-i|}}{2} e^{\iota k(x_j - x_i)}}{\alpha e^{-\iota kh} + 1 + \alpha e^{\iota kh}} = \frac{\sum_{n=0}^M a_n \cos(nkh)}{1 + 2\alpha \cos(kh)} \quad (2.71)$$

Le but poursuivi ici est de déterminer les coefficients  $a_n$  afin que le filtre obtenu

possède une fonction de transfert adaptée à l'élimination des oscillations factices. La démarche communément adoptée consiste à rechercher la précision formelle optimale par une approche basée sur des développements de Taylor (voir section 2.2) tout en imposant que la fonction de transfert soit nulle pour  $kh = \pi$  (afin d'éliminer les oscillations factices).

La contrainte  $\mathcal{T}_i(kh = \pi) = 0$  fournit une première relation entre les coefficients  $a_n$  :

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots = 0 \quad (2.72)$$

Les  $M$  autres relations nécessaires pour fermer le système sont données en effectuant des développements de Taylor des côtés gauche et droit de l'expression 2.70 puis en imposant l'égalité des termes de même ordre pour les  $M$  premiers ordres pairs (les ordres impairs s'annulant quelles que soient les valeurs des coefficients  $a_n$ ) :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots &= 1 + 2\alpha \text{ (Ordre 0)} \\ a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + 4^2 a_4 + 5^2 a_5 + \dots &= 2\alpha \text{ (Ordre 2)} \\ a_1 + 2^4 a_2 + 3^4 a_3 + 4^4 a_4 + 5^4 a_5 + \dots &= 2\alpha \text{ (Ordre 4)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Le schéma de filtrage ainsi obtenu, d'une précision formelle de  $2M$ , élimine les modes les plus élevés auxquels sont associées les oscillations factices tout en restituant, fidèlement si la précision formelle est suffisante, la fonction  $f$  sur le reste du spectre. Les relations permettent d'exprimer les coefficients  $a_n$  à partir du paramètre  $\alpha$  dont la valeur peut être choisie de façon à adapter la sélectivité du filtre à la largeur de la zone du spectre entachée par les oscillations factices. Par exemple, si l'on souhaite que le filtre n'ait aucun effet pour  $k < k_f$ , une valeur potentiellement intéressante de  $\alpha$  peut être déterminée en imposant  $\mathcal{T}_i(k_f h) = 1$ . Toutefois, la valeur de  $\alpha$  ainsi obtenue ne garantit absolument pas que le filtre possède de bonnes priorités sur l'ensemble du spectre. Ce dernier point peut être résolu par l'analyse du profil de la fonction de transfert. La figure 2.13 montre les profils de la fonction de transfert du schéma considéré ici pour  $\alpha = 0.2495$  et  $\alpha = 0.2$ .

### 5.1.5 Utilisation de schémas sur-dissipatifs

L'utilisation de schémas de dérivée seconde, choisis pour leur tendance à surévaluer les termes diffusifs pour les  $kh$  élevés, peut également permettre d'éliminer les oscillations factices. Le schéma combiné d'ordre 6 défini par la relation 2.17 constitue

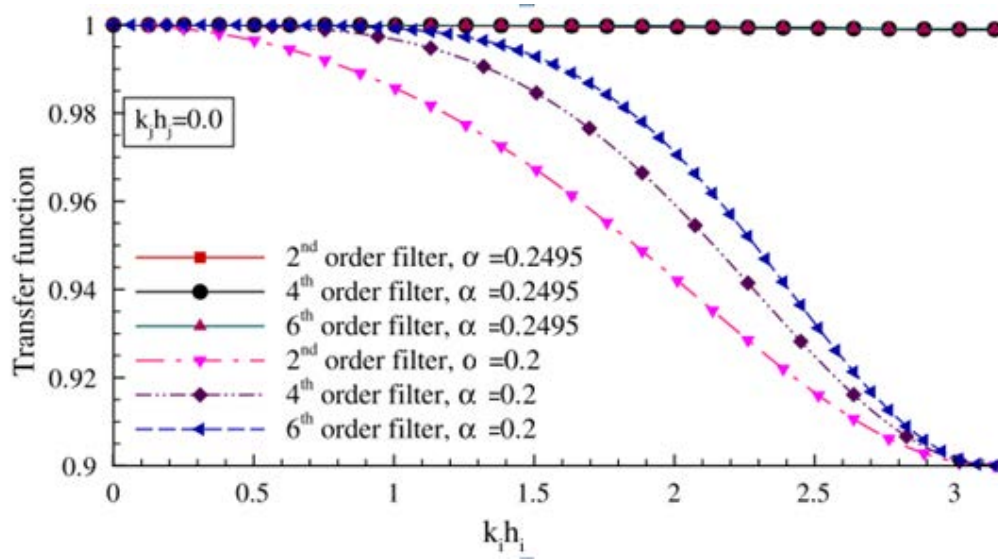


FIGURE 2.13 – Profils de la fonction de transfert pour des filtres d'ordre et de valeur  $\alpha$  différents, tirés de [24]

un bon exemple de schéma sur-dissipatif. L'approche optimisée présentée dans la section 3.3 peut également être utilisée pour calibrer un schéma explicite ou compact de façon à surestimer le nombre d'onde modifié  $k^{(2)}/k^2$  (associé à la dérivée seconde) pour les fréquences les plus élevées et induire ainsi un surplus de dissipation. À titre d'illustration, la figure 2.14 présente le profil de  $k^{(2)}/k^2$  associé au schéma combiné d'ordre 6 (relation 2.17), celui correspondant au schéma explicite standard d'ordre 2 ainsi que celui du schéma compact de Padé d'ordre 6. On remarque clairement que le schéma combiné est sur-dissipatif ( $k^{(2)}/k^2 > 1$ ) vers les  $kh$  les plus élevés.

On notera que la réduction des oscillations factices par l'approche « sur-dissipative » dépend naturellement de l'importance des termes diffusifs dans l'équation de Navier-Stokes. Cette approche est donc essentiellement adaptée aux régions de l'écoulement dominées par la diffusion (à proximité des parois notamment). La fiabilité de l'approche « sur-dissipative » a été analysée par Sengupta [25, 26] au travers de l'étude d'un écoulement turbulent bidimensionnel ( $Re = 10000$ ) dans une cavité entraînée. Dans cette étude, un schéma combiné est appliqué afin d'estimer les termes de convection et de diffusion. Par ailleurs, on notera que les équations de Navier-Stokes considérées par Sengupta sont formulées sous une forme particulièrement adaptée à l'utilisation de schémas combinés, faisant intervenir les dérivées première et seconde



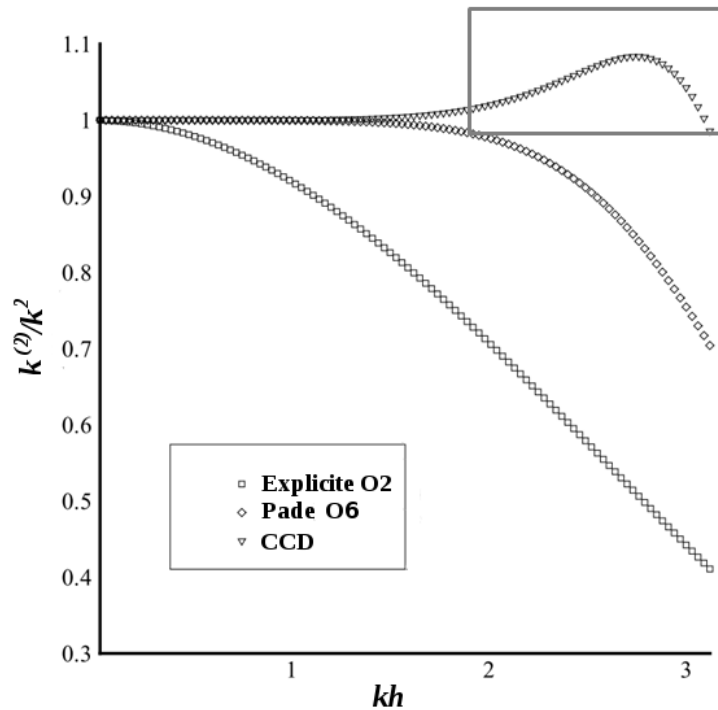


FIGURE 2.14 – Profil de  $k^{(2)}/k^2$  pour la dérivée seconde pour : le schéma standard explicite d'ordre 2, le schéma de Padé d'ordre 6 et le schéma combiné d'ordre 6 (CCD). La figure est tirée de [25]

de la vortacité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.74)$$

La figure 2.15, tirée de [26], montre l'amplitude  $|\hat{q}(k)|$  des différents modes de Fourier pour le produit  $q = u \frac{\partial \omega}{\partial x}$  dans le cas où les termes convectifs et diffusifs de l'équation 2.74 sont discrétisés selon le schéma compact combiné (CCD). Les résultats sont comparés avec l'utilisation du schéma compact optimisé et centré OUCS3 [14] pour les termes convectifs et du schéma de Padé d'ordre 6 pour les termes diffusifs (OUCS3-PADÉ). Dans le cas OUCS3-PADÉ, la nature sous-dissipative du schéma de Padé vers les modes les plus élevés (voir figure 2.14) favorise le développement des oscillations factices qui se traduisent par la présence d'une bosse vers  $kh = \pi$ . Cette bosse n'est pas observée dans le cas CCD où la nature sur-dissipative du schéma combiné permet de réduire convenablement les oscillations factices. On notera toutefois que l'utilisation d'un schéma sur-dissipatif a également été testée dans notre code DNS (voir section 4.1 du chapitre 4) et s'est révélée moins efficace

que le filtrage de la solution numérique. Cette approche ne sera donc pas utilisée par la suite.

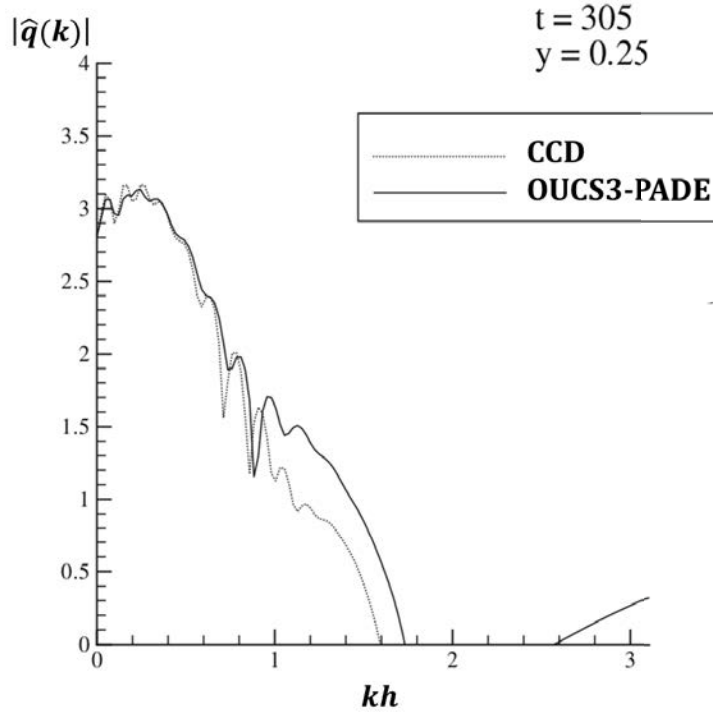


FIGURE 2.15 – Amplitude des modes de Fourier pour le produit  $q = u \frac{\partial \omega}{\partial x}$  à  $t = 305$ . La figure est tirée de Sengupta et al. [26]

## 5.2 Parallélisme à mémoire distribuée et schémas compacts

Comme discuté dans le chapitre 1, la simulation d'écoulement turbulent requiert de recourir à des stratégies de parallélisation à mémoire distribuée afin d'obtenir une accélération suffisante des performances du code de simulation. Les processus ont alors une vue limitée du domaine de calcul et n'ont pas accès aux données situées à l'extérieur de leurs sous-domaines respectifs. Une manière simple de calculer les dérivées aux interfaces des sous-domaines pourrait être d'utiliser des schémas aux limites décentrés n'utilisant que des points situés à l'intérieur du sous-domaine. Cette approche est cependant particulièrement inadaptée aux schémas compacts qui tendent à propager l'erreur commise aux interfaces vers l'intérieur du sous-domaine du fait de leur nature globale. En effet, les schémas décentrés ont une précision inférieure aux schémas centrés utilisés à l'intérieur des sous-domaines, comme le montre les profils du nombre d'onde modifiés donnés dans la littérature [14, 27]. Des

stratégies plus élaborées doivent alors être utilisées afin de réduire l'influence des interfaces sur l'intérieur des sous-domaines de calcul.

L'approche par « extrapolation » proposée par Kim et al. [28] consiste à ne travailler qu'avec le même schéma pour l'ensemble du sous-domaine. Naturellement, les données concernant les valeurs de la fonction aux limites des sous-domaines voisins doivent être communiquées par les processus associés. Les dérivées relatives aux sous-domaines voisins intervenant dans l'expression des schémas compacts doivent être extrapolées à partir des valeurs de la fonction fournies par les processus « voisins ». Une autre approche utilisée par Sengupta et al. [29] consiste à employer des schémas aux limites décentrés. Les schémas compacts doivent alors être appliqués sur un sous-domaine élargi, contenant entièrement le sous-domaine considéré, afin de limiter les effets des limites (très néfastes dans ce cas) sur les estimations effectuées à l'intérieur du sous-domaine. Par la suite, cette stratégie sera nommée « approche par élargissement ». Il est à noter que l'élargissement du sous-domaine est une approche générale qui peut donc être utilisée dans d'autres contextes que celui d'un schéma aux limites décentré. Notamment, une utilisation conjointe de cette approche avec l'approche par extrapolation, en vue d'améliorer la précision d'un schéma compact, est tout à fait possible, bien que relativement coûteuse.

### 5.2.1 Élargissement du sous-domaine

On considère un sous-domaine d'indice  $p$  comportant  $N_p$  points numérotés de 1 à  $N_p$ . L'approche par élargissement du sous-domaine consiste à calculer les dérivées sur un sous-domaine élargi (SDE), construit par ajout de points de part et d'autre du sous-domaine, afin d'atténuer les effets du traitement particulier effectué aux limites. Par exemple, si le SDE est construit par ajout de  $m$  points supplémentaires de chaque côté du sous-domaine, les dérivées seront calculées des points  $1 - m$  à  $N_p + m$ . Les schémas aux limites seront naturellement appliqués aux limites du SDE et auront donc un effet d'autant plus limité sur les estimations effectuées sur le sous-domaine (points 1 à  $N_p$ ) que la valeur de  $m$  sera grande. La figure 2.16 propose une vue du sous-ensemble et du SDE correspondant dans le cas où  $m = 4$ .

On notera que cette approche nécessite de résoudre  $3 \times 2m$  équations supplémentaires pour chaque sous-domaine, le facteur 3 étant dû à la nature tridimensionnelle du problème. Par ailleurs, les valeurs de la fonction aux points  $[1 - m, 0]$  et  $[N_p, N_p + m]$  sont relatives aux sous-domaines voisins et doivent donc être communiquées par les processus voisins. Cet échange de valeurs entre les différents processus peut s'avérer très coûteux lorsque la valeur de  $m$  est trop élevée. Ainsi, bien

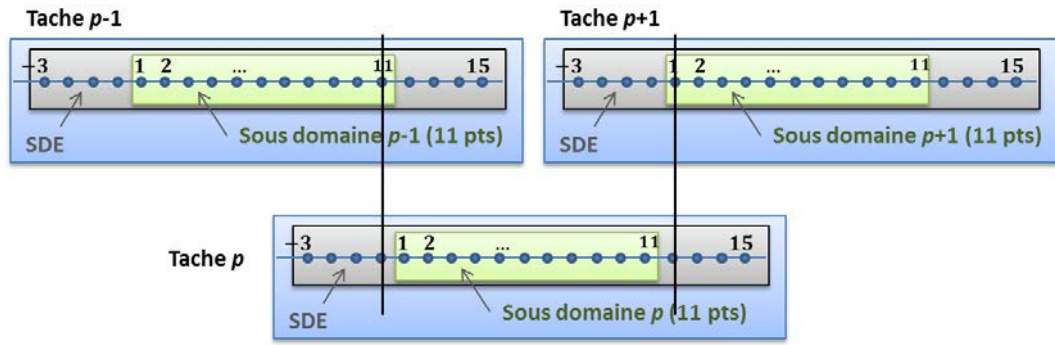


FIGURE 2.16 – Vue d’ensemble des processus, du sous-domaine et du sous-domaine élargi qui leur sont affectés

que l’ajout de  $m$  points supplémentaires contribue fortement à accroître la précision obtenue, il convient de veiller à ce que  $m$  ne soit pas trop élevé afin de ne pas rendre la parallélisation inefficace.

Enfin, les valeurs des dérivées aux points  $N_p - m + 1$  et  $m$  calculées respectivement par les processus  $p - 1$  et  $p + 1$  peuvent être utilisées pour fermer le système d’équations du sous-domaine  $p$  afin d’obtenir une nouvelle estimation, plus précise, des dérivées. La précision de cette approche peut donc être augmentée en procédant selon une démarche itérative. Le nombre d’itérations effectuées devra toutefois être nettement inférieur au nombre de processus tournant en parallèle afin, une fois encore, que la parallélisation reste intéressante par rapport au cas séquentiel.

L’étude de Sengupta [29] propose une analyse assez détaillée des effets de cette approche sur la solution obtenue et envisage différentes options permettant de réduire la valeur de  $m$  tout en conservant une précision satisfaisante. La figure 2.17, tirée de cet article, montre l’influence de  $m$  sur la solution de l’équation d’onde appliquée à la propagation d’un paquet d’ondes. On remarque que la solution parallèle obtenue avec  $m = 6$  est quasiment identique à la solution obtenue de manière séquentielle. En revanche, le cas  $m = 2$  produit des répliques du paquet d’onde initial chaque fois que celui-ci franchit une interface. Une des solutions préconisées par Sengupta est l’amortissement de ces répliques par l’utilisation d’un filtre éliminant les hautes fréquences, pour lesquelles apparaissent ces répliques. Ce filtre ne devra toutefois pas être appliqué trop fréquemment si l’on veut éviter un amortissement excessif du signal initial.

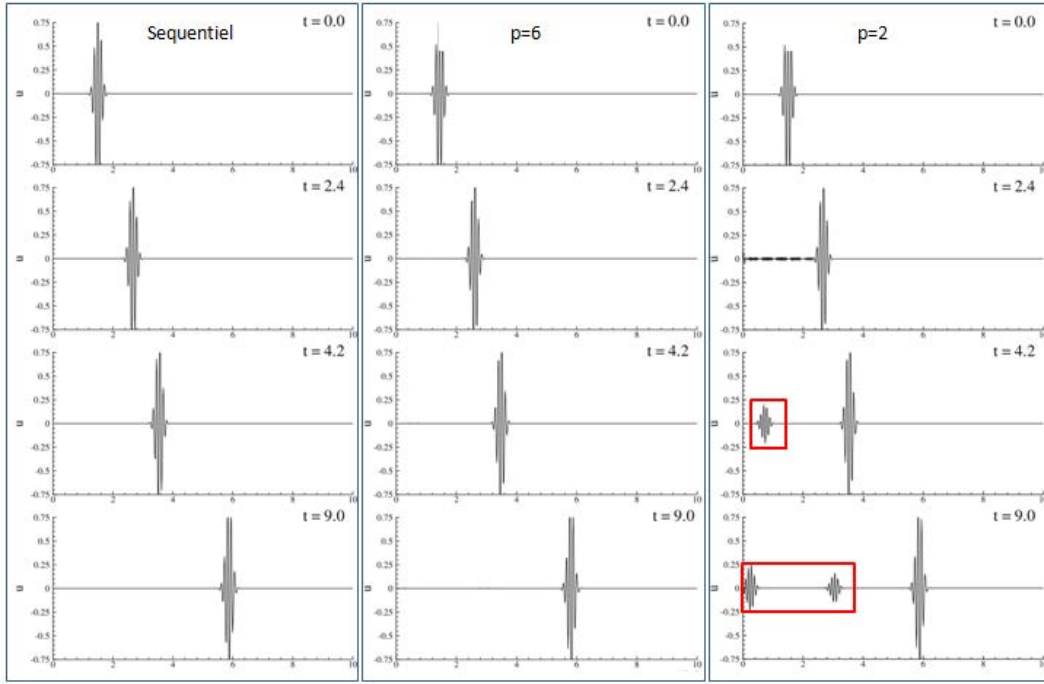


FIGURE 2.17 – Influence de la taille du sous-domaine élargi sur la qualité de la solution numérique, d'après [29]

### 5.2.2 Extrapolation des dérivées manquantes

Une fois encore, on considère un sous-domaine d'indice  $p$  comportant  $N_p$  points numérotés de 1 à  $N_p$ . L'approche par extrapolation consiste à éviter l'utilisation d'un schéma aux limites différent de celui employé pour le reste du sous-domaine en estimant les dérivées aux points extérieurs (points  $[0, -1, \dots]$  et  $[N_p, N_p + 1, \dots]$ ) par extrapolation. Cette astuce permet de fermer le système d'équations associé au schéma : celui-ci ne comporte plus que  $N_p$  inconnues (les dérivées aux points du sous-domaine) et  $N_p$  équations.

Par exemple, si on considère le schéma compact suivant :

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} + \beta f'_{i+2} = \sum_{n=1}^3 a_n (f_{i+n} - f_{i-n}) \quad (2.75)$$

Le système de  $N_p$  équations associé à ce schéma fait intervenir  $N_p + 4$  inconnues, les quatre inconnues de trop étant les dérivées aux points  $\{-1, 0\}$  et  $\{N_p + 1, N_p + 2\}$ . Une fermeture du système peut être effectuée en effectuant l'extrapolation suivante, proposée par [27] :

$$\begin{aligned}
 F_i &= \sum_{n=0}^{N_A} p_n i^n + \sum_{n=1}^{N_B} q_n \cos(i\Phi_n) + r_n \sin(i\Phi_n) \\
 F'_i &= \frac{1}{h} \left( \sum_{n=1}^{N_A} n p_n i^{n-1} + \sum_{n=1}^{N_B} q_n \sin(i\Phi_n) - r_n \cos(i\Phi_n) \right)
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Dans ces équations, la quantité  $F$  correspond à l'estimation de  $f$  fournie par l'extrapolation. Dans le cas où  $N_A = 4$  et  $N_B = 3$ , les équations 2.76 impliquent  $1 + N_A + 2N_B = 11$  inconnues que l'on peut résoudre en imposant les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_i &= f_i \text{ pour } i = (-2, -1, 0, \dots, 5) \\
 F'_i &= f'_i \text{ pour } i = (1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

On peut alors, moyennant les dérivées extrapolées aux points -1 et 0, appliquer le même schéma aux points 1 et 2 que pour les points intérieurs du sous-domaine :

$$\begin{aligned}
 \beta F'_{-1} + \alpha F'_0 + f'_1 + \alpha f'_2 + \beta f'_3 &= \sum_{n=1}^3 a_n (f_{1+n} - f_{1-n}) \\
 \beta F'_0 + \alpha f'_1 + f'_2 + \alpha f'_3 + \beta f'_4 &= \sum_{n=1}^3 a_n (f_{2+n} - f_{2-n})
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

La force de cette approche réside dans sa consistance (le schéma appliqué aux limites étant identique aux schémas intérieur) qui permet, *a priori*, d'obtenir une précision satisfaisante quelque soit le point considéré. Elle ne nécessite donc pas d'élargir le sous-domaine comme l'aurait imposé l'utilisation de schémas aux limites décentrés et n'induit aucun coût numérique supplémentaire.

Enfin, il est important de préciser que les dérivées extrapolées doivent être exprimées en fonction des valeurs connues et des dérivées du sous-domaine afin que le schéma puisse être appliqué. L'utilisation de la relation 2.76 pour  $F'_0$  et  $F'_{-1}$  permet

d'obtenir :

$$\begin{aligned} f_1' + \gamma_{02}f_2' + \gamma_{03}f_3' &= \sum_{n=-2, \neq 1}^4 b_{0n}(f_n - f_1) \\ \gamma_{11}f_1' + f_2' + \gamma_{13}f_3' + \gamma_{14}f_4' &= \sum_{n=-2, \neq 2}^4 b_{1n}(f_n - f_2) \end{aligned} \quad (2.79)$$

où les valeurs des coefficients  $\gamma$  et  $b$  sont données dans [27]. On remarquera notamment que les côtés gauches de l'équation 2.79, lorsqu'ils sont retranscrits sous forme matricielle, conservent la largeur de bande de la matrice  $\mathcal{A}$  et n'induisent donc, une fois encore, aucun surcoût numérique.

La figure 2.18 tirée de [27] montre le nombre d'onde modifié multiplié par  $h$  ( $\bar{\kappa} = k^{(1)}h$ ) en différents points du sous-domaine (le cas  $i = 0$  de la figure correspond à  $i = 1$  selon nos conventions). Les profils de la partie réelle de  $\bar{\kappa}$  montrent une excellente résolution spectrale, y compris pour les points situés à proximité des interfaces (points 0 et 1). Cependant, la partie imaginaire significative observée pour ces mêmes points peut induire une modification de la dissipation pouvant compromettre la stabilité du schéma. Ce problème peut être résolu, selon les auteurs, par l'utilisation d'un filtre à chaque itération temporelle. Le nombre  $N_p$  de points sur lequel le filtre est appliqué fournit alors une assez bonne estimation du coût numérique induit à chaque itération temporelle.

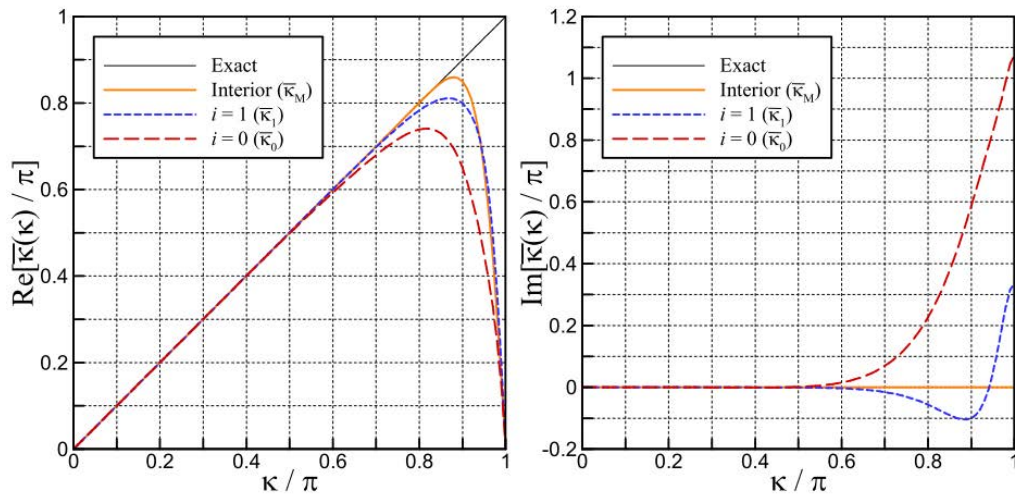


FIGURE 2.18 – Profils du nombre d'onde modifié en différents point du sous-domaine

## 6 Approches utilisées

Les sections précédentes ont été l'occasion d'aborder un grand nombre d'approches numériques envisageables pour la simulation d'écoulements turbulents incompressibles. On se propose ici d'indiquer les approches retenues dans la suite de ce travail ainsi que le contexte dans lequel celles-ci seront utilisées.

### Schémas de calcul

- **Schémas explicites standards** Des schémas explicites standards d'ordre 2 ont été implémentés dans le code DNS et seront utilisés pour la simulation d'écoulements autour d'un corps immergé où l'utilisation de schémas plus précis est délicate (voir section 4.2 du chapitre 5)
- **Schémas explicites optimisés** Les schémas explicites optimisés permettent d'obtenir une très bonne précision tout en étant relativement peu coûteux à évaluer. Ce sont ces schémas qui seront utilisés pour les simulations d'écoulements en canal à nombres de Reynolds modérés présentées dans la troisième partie de cette thèse.
- **Schémas compacts** Les tests de performances effectués dans la section 5.3 du chapitre 4 montrent que les schémas compacts sont moins efficaces que les schémas explicites optimisés, de précision équivalente, sur notre machine de travail (calculateur TURING). Les schémas compacts seront cependant utilisés pour la validation du code DNS (voir section 4.2 du chapitre 4) où les résultats de simulations à bas nombres de Reynolds obtenus avec les schémas explicites optimisés seront comparés à ceux de simulations utilisant des schémas compacts.

### Élimination des oscillations factices

- **Formulation skew-symmetric des termes non linéaires** La formulation skew-symmetric permet de réduire fortement les oscillations factices dues aux modes situés à proximité de la plage de résolution, qui constituent l'essentiel des oscillations factices. Toutefois, cette approche ne sera pas utilisée du fait de son coût numérique élevé (estimation de deux dérivées supplémentaires pour chaque terme de convection).
- **Schémas décentrés** Cette approche a été utilisée avec succès dans la littérature [18, 17] qui propose par ailleurs un grand nombre de schémas décentrés [22, 27]. L'approche décentrée est cependant relativement coûteuse du fait de



la décomposition des flux de vitesse et n'a pas été implémentée dans le code DNS.

- **Schémas sur-dissipatifs** Des schémas de dérivée seconde sur-dissipatifs pour les modes les plus élevés ont été implémentés. Cette approche s'est montrée peu efficace au cours des tests effectués et ne sera pas utilisée (voir section 4.1 du chapitre 4).
- **Filtrage de la solution numérique** Les tests réalisés dans la section 4.1 du chapitre 4 montrent que le filtrage de la solution numérique toutes les 100 itérations permet de trouver un bon compromis entre la réduction des oscillations factices et la conservation de l'énergie. Cette approche sera utilisée pour les simulations effectuées sur des grilles grossières (par exemple, pour l'obtention d'un champ turbulent à partir d'un écoulement de Poiseuille, voir section 2.2 du chapitre 7).

### Parallélisme et schémas compacts

Les méthodes d'élargissement du sous-domaine (section 5.2.1) et d'extrapolation (5.2.2) sont fortement recommandées dans le cas d'une décomposition 3D du domaine de calcul, où l'absence de direction globale pose le problème de l'accès aux valeurs de la fonction et de ses dérivées au-delà du sous-domaine de calcul. Dans notre cas, le choix d'une décomposition 2D permet d'utiliser les schémas compacts de manière séquentielle dans la direction non concernée par la décomposition. Ces stratégies ne seront donc pas utilisées par la suite.

# Deuxième partie

## Développement et optimisation du code de simulation

Comme mentionné précédemment, le code utilisé est une évolution du code de simulation numérique directe développé par Orlandi [9], basé sur une discrétisation des équations de Navier-Stokes selon la méthode des différences finies. Une partie importante de cette thèse a été consacrée à la parallélisation du code ainsi qu'à l'implémentation de schémas à haute précision afin d'augmenter les performances du code et de pouvoir accéder à des nombres de Reynolds plus élevés que ceux initialement considérés.

Cette partie est consacrée à la présentation du code de simulation numérique ainsi qu'à la validation des développements effectués. Le chapitre 3 se concentre essentiellement sur le noyau de la DNS, c'est à dire sur la résolution des équations de Navier-Stokes. Le chapitre 4 se propose d'appliquer les schémas à haute précision à la simulation d'un écoulement en canal à faible nombre de Reynolds ( $Re_\tau = 180$ ) afin de valider l'implémentation de ces schémas et de déterminer le gain de précision obtenu par rapport à l'utilisation de schémas d'ordre 2. Les performances parallèles du code seront également démontrées. Enfin, le chapitre 5 présente les principaux développements effectués afin d'améliorer la généricité du code et de permettre la simulation d'écoulements pour différents jeux de conditions limites. Les changements apportés seront validés à travers la simulation d'un écoulement turbulent autour d'un corps chauffant.



# Chapitre 3

## Présentation générale du code

### 1 Équations gouvernant la physique

Les écoulements turbulents considérés dans cette étude sont régis par les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \quad (3.1)$$

où  $\nu$  et  $\rho$  représentent respectivement la viscosité cinématique et la masse volumique de l'écoulement. On notera également que, sauf indication explicite, la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés est appliquée ici ainsi que dans la suite de cette thèse.

Dans le code DNS, les variables de l'équation sont exprimées dans les échelles externes basées sur les grandeurs globales caractéristiques de l'écoulement. L'échelle externe utilisée pour la longueur est naturellement la demi-hauteur  $h$  du canal. Par ailleurs, l'état turbulent est obtenu par application d'un soufflage sur un écoulement de Poiseuille : la vitesse  $U_{cp}$  au centre de l'écoulement de Poiseuille initial est donc utilisée comme échelle de vitesse externe. L'équation de Navier-Stokes ainsi adimensionnalisée est alors :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re_P} \Delta u_i^* \quad (3.2)$$

Cette forme fait intervenir le nombre de Reynolds  $Re_P = \frac{U_{cp} h}{\nu}$  basé sur l'écoulement de Poiseuille initial. Par la suite, le symbole « \* » utilisé pour exprimer l'adimensionalisation selon les échelles du code sera volontairement oublié afin de

ne pas alourdir l'écriture des équations à venir. Il convient cependant de garder à l'esprit que les quantités manipulées par le code sont exprimées dans les échelles de longueur et de vitesse  $(h, U_{cp})$ .

Du fait de l'incompressibilité de l'écoulement, l'équation de continuité se traduit par une condition de divergence nulle du champ de vitesse en tout point du domaine de calcul et à chaque itération :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

Par ailleurs, la conservation de l'état turbulent nécessite l'ajout d'une contrainte de conservation du débit afin d'éviter toute perte de charge :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int \frac{\partial u}{\partial t} dV = 0 \quad (3.4)$$

La physique du système est donc régie par un ensemble de cinq équations constitué des équations de Navier-Stokes (trois équations) auxquelles s'ajoutent les contraintes d'incompressibilité et de conservation du débit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_P} \Delta u_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \int \frac{\partial u_1}{\partial t} dV &= 0 \end{aligned}$$

Les contraintes d'incompressibilité et de conservation du débit peuvent être imposées en décomposant le champ de pression instantanée  $p = P + p'$  en sa valeur moyenne  $P = \int p dV$  dans l'espace et sa composante fluctuante  $p'$ . L'incompressibilité de l'écoulement est assurée à travers la composante fluctuante  $p'$  dans le cadre de l'approche du pas fractionné présentée plus loin dans ce chapitre. La condition de conservation du débit est imposée en ajustant le gradient de pression moyen afin de corriger les déviations par rapport au débit moyen.

## 2 Description du domaine de calcul

Dans cette section, on désignera par  $x$  la direction de l'écoulement,  $z$  la direction transverse et  $y$  la direction normale aux parois.

## 2.1 Vue d'ensemble

La figure 3.1 propose une vue globale du domaine de calcul ainsi qu'un résumé de certaines caractéristiques telles que la direction des composantes de la vitesse, le système de coordonnées ou les conditions aux limites appliquées dans les différentes directions. La nature infinie de l'écoulement dans les directions  $x$  et  $y$  est modélisée par des conditions aux limites périodiques selon ces directions. Dans la direction  $y$ , l'effet des parois est modélisé par une condition aux limites de Dirichlet imposant une vitesse nulle aux limites du domaine de calcul dans cette direction.

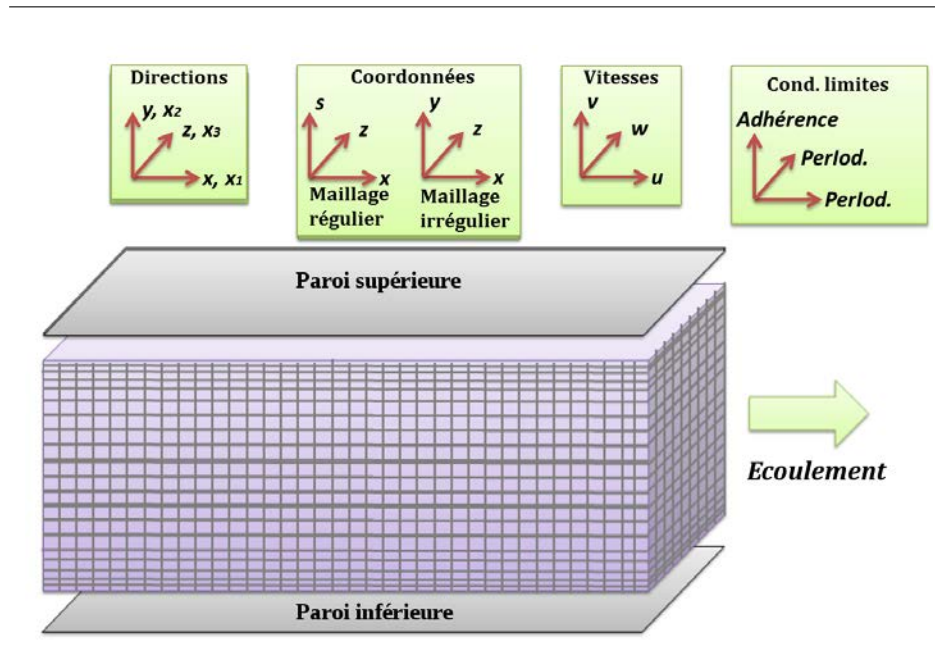


FIGURE 3.1 – Vue d'ensemble du domaine de calcul

## 2.2 Géométrie du maillage

Le maillage utilisé pour les directions  $x$  et  $z$  est régulier, ce qui signifie que la distance entre deux points voisins est constante dans ces deux directions. En revanche, les quantités physiques varient plus fortement à proximité des parois qu'au centre du canal et suggèrent de ce fait l'utilisation d'un maillage raffiné à proximité des parois pour la direction  $y$ .

Le code DNS propose deux types de transformations : la transformation utilisée par Orlandi dans son code DNS (transformation d'Orlandi) et la transformation proposée par Laizet et al. [30] permettant une résolution spectrale de l'équation de

Poisson dans la direction irrégulière et indépendante des schémas de calcul utilisés (voir la section 2 du chapitre 5).

### 2.2.1 Transformation d’Orlandi

La transformation d’Orlandi a été utilisée pour les simulations d’écoulements turbulents en canal, la transformation de Laizet n’ayant été implémentée que tardivement dans le cadre de l’ajout de nouvelles fonctionnalités au code DNS (voir le chapitre 5). Cette transformation définit la position des points sur  $y$  en fonction de leur indice  $j$  selon la relation :

$$y(j) = 1 + \frac{\tanh(a(s(j) - \frac{1}{2}))}{\tanh(\frac{a}{2})} \quad 0 < y(j) < 2 \quad (3.5)$$

où  $s(j) = \frac{j-1}{N_y-1}$ . Cette relation construit un maillage déformé à partir d’un ensemble de points uniformément répartis donné par  $s(j)$ . Par la suite, on appellera « maillage physique », la distribution  $y$  (qui correspond à la position réelle des nœuds du maillage) et « maillage uniforme », la distribution  $s$  servant de base à la transformation.

Le paramètre  $a$  est utilisé pour contrôler l’intensité de la déformation. La figure 3.2 montre l’évolution du maillage ainsi obtenu en fonction de la valeur de  $a$ . La valeur de  $a$  retenue pour cette étude est  $a = 3.8$ , valeur qui permet une bonne adaptation de la grille aux variations de la taille des plus petites échelles de l’écoulement en fonction de  $y$ . La taille des mailles varie alors de  $y^+ = 0.5$  aux parois à  $y^+ = 5.5$  au centre du canal pour  $N_y = 129$  dans le cas d’une simulation à  $Re_\tau = 180$ . On notera que les tailles de mailles indiquées ici sont exprimées dans les échelles internes (indiquées par le signe « + ») qui gouvernent la physique de l’écoulement à proximité de la paroi et qui seront souvent utilisées pour présenter les résultats de simulation numérique. La définition exacte de ces échelles basée sur le cisaillement moyen à la paroi est donnée dans la section 2.3 du chapitre 6.

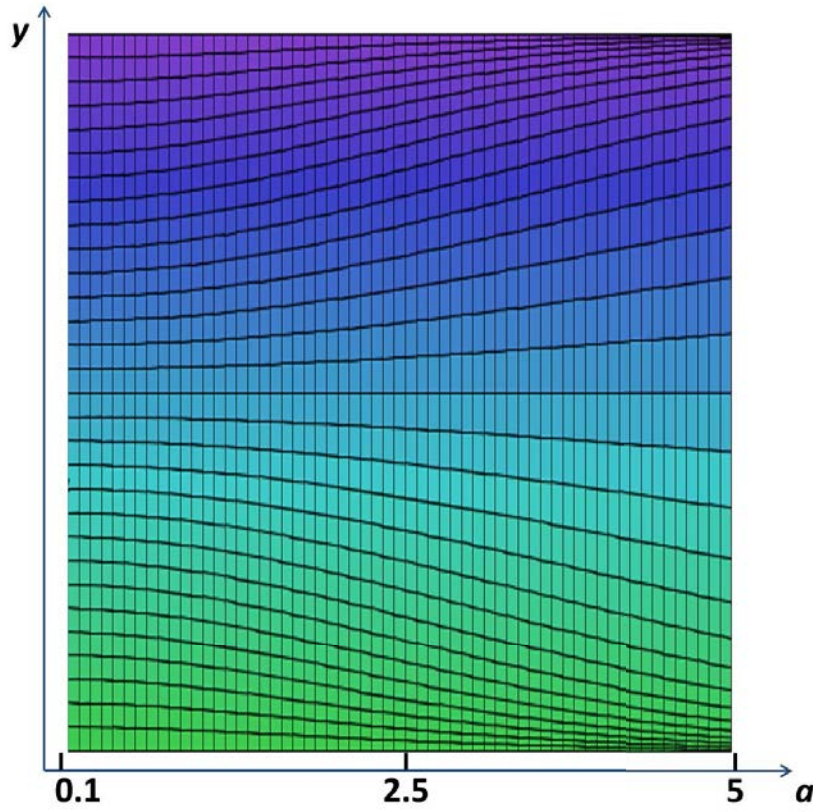


FIGURE 3.2 – Évolution du maillage physique en fonction du paramètre  $a$  pour la transformation d'Orlandi

### 2.2.2 Transformation de Laizet

Les coordonnées dans la direction  $y$  d'un point du maillage sont définies à partir de son indice  $j$  selon la transformation [30] :

$$y(j) = \frac{L_y \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{\alpha\beta + 1}} \left\{ \tanh \left[ \frac{\sqrt{\alpha\beta + 1} \tan(\pi(s(j) + \frac{1}{2}))}{\sqrt{\alpha\beta}} \right] + \pi (H(s(j)) + H(s(j) - 1)) \right\} \quad (3.6)$$

où  $H$  est la fonction d'Heaviside et  $s(j) = \frac{j-1}{N_y-1}$ . Le paramètre  $\alpha$  est défini par  $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 \pi^2}}{2\beta}$  de façon à obtenir  $y(1)=0$  et  $y(N_y) = L_y = 2$ . L'intensité de la déformation appliquée est contrôlée par le paramètre  $\beta$  comme montré dans la figure 3.3. Le raffinement escompté à proximité des parois est bien observé et est d'autant plus agressif que la valeur de  $\beta$  est petite. La valeur  $\beta = 0.21$  permet d'obtenir un degré d'étirement entre la taille des mailles aux parois et au centre du canal similaire



à la valeur  $a = 3.8$  retenue pour la transformation d’Orlandi et sera donc utilisée par la suite.

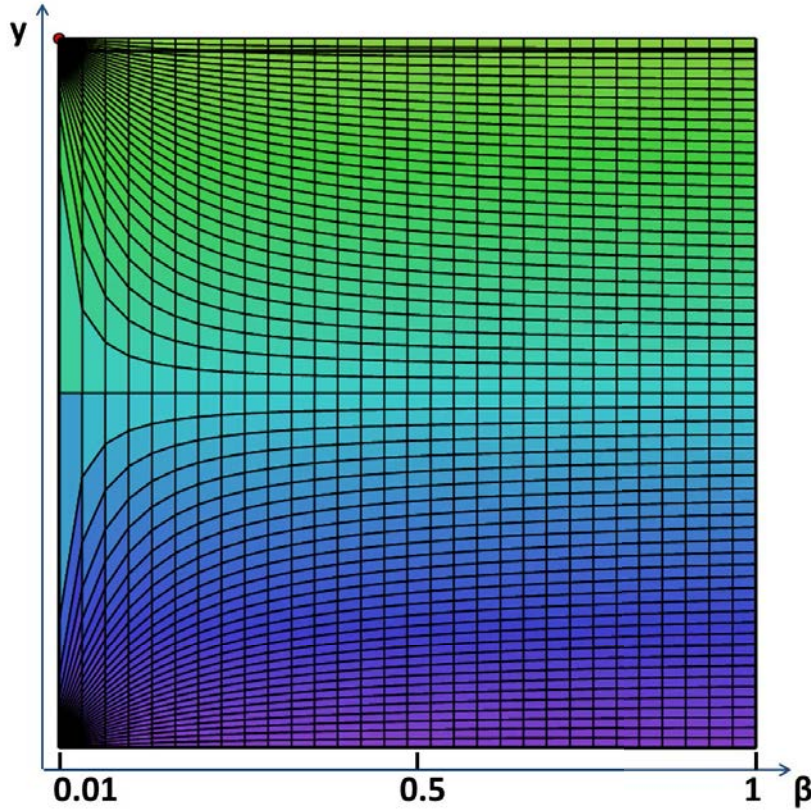


FIGURE 3.3 – Évolution du maillage physique en fonction du paramètre  $\beta$  pour la transformation de Laizet

La figure 3.4 compare l’évolution de la taille des mailles, exprimée dans les échelles internes, pour la transformation d’Orlandi avec  $N_y=129$  et  $a=3.8$  et pour la transformation de Laizet avec  $N_y=217$  et  $\beta=0.21$ . Les paramètres  $a$  et  $\beta$  ainsi que le nombre de points ont été choisis de façon à obtenir la même taille de maille aux parois et au centre du canal pour les deux transformations. On remarque tout d’abord que l’utilisation de la transformation de Laizet nécessite 1.7 fois plus de points. Par ailleurs, la taille des mailles augmente beaucoup moins rapidement lorsque l’on s’éloigne des parois. Les tests effectués ont montré que cette taille des mailles globalement plus petite à proximité des parois, zone physiquement très active, pouvait induire une augmentation sensible (de l’ordre de 50%) du nombre CFL, nuisible à la stabilité de la solution numérique. L’utilisation de ce maillage nécessite alors de réduire le pas de temps d’environ 30% par rapport à la transformation d’Orlandi.

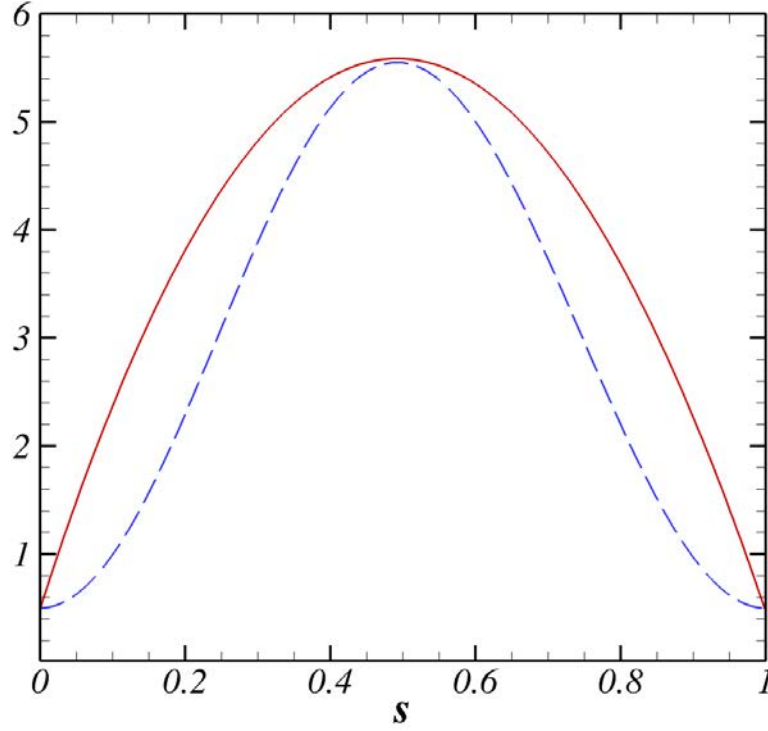


FIGURE 3.4 – Évolution de la taille des mailles en fonction de  $s$  pour la méthode d’Orlandi avec  $a=3.8$  et  $N_y = 129$  (ligne pleine) et pour la transformation de Laizet avec  $\beta=0.21$  et  $N_y = 217$  (pointillés).

Malgré ces limitations, la transformation de Laizet sera utilisée lorsque les conditions aux limites appliquées à l’écoulement différeront de celles initialement supportées dans le code DNS (périodicité en  $x$  et en  $z$ , et condition de Dirichlet en  $y$ ). Dans ce cas, la résolution de l’équation de Poisson (equation 3.16) sera effectuée selon l’approche purement spectrale proposée par Laizet, incompatible avec la transformation d’Orlandi.

### 2.2.3 Calcul des dérivées

La déformation du maillage pose le problème de l’évaluation des dérivées dans la direction  $y$ . Ce travail peut être réalisé, soit en utilisant des schémas adaptés à la nature de la déformation du maillage considéré (approche *pleinement intégrée*), soit en effectuant un changement de variable (transformation jacobienne) afin d’exprimer les dérivées dans le maillage irrégulier à partir des dérivées dans le maillage régulier, facilement calculables avec les schémas de calcul classiques (approche jacobienne).

Pour des raisons de simplicité d'implémentation et de précision, notre choix s'est porté sur l'approche jacobienne.

En effet, en raison de la répartition dissymétrique des points du maillage non-uniforme, les schémas pleinement intégrés ont une partie imaginaire non nulle qui influe sur la dissipation effective de l'équation discrétisée. Leur utilisation peut donc rendre la solution numérique instable et requiert donc une vigilance accrue. Par ailleurs, la précision de ces schémas est généralement inférieure à celle des schémas utilisés sur un maillage uniforme. Comme indiqué précédemment, l'approche jacobienne retenue pour ce travail consiste à exprimer les dérivées dans le maillage irrégulier à partir des dérivées dans le maillage uniforme selon la transformation :

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial s}{\partial y} \frac{\delta f}{\delta s} \quad (3.7)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 s}{\delta y^2} \frac{\delta f}{\delta s} + \left( \frac{\delta s}{\delta y} \right)^2 \frac{\delta^2 f}{\delta s^2} \quad (3.8)$$

Dans ces expressions, le symbole  $\delta$  est associé aux dérivées estimées par les schémas de calcul et le symbole  $\partial$  correspond à des dérivées exactes calculées, pour une plus grande précision, à partir de leurs expressions analytiques.

Cette approche permet d'obtenir une excellente précision tout en utilisant les mêmes schémas que sur un maillage régulier. En revanche, le calcul de la dérivée seconde impose celui de la dérivée première dans le maillage régulier et est donc deux fois plus coûteux que dans le cas de l'approche pleinement intégrée. Ce surcoût est à relativiser en raison de la proportion réduite ( $1/6$ ) que représente le terme de diffusion selon  $y$  parmi les autres termes de l'équation de Navier-Stokes.

## 2.3 Arrangement des variables

La manière la plus simple de positionner les variables sur la grille est naturellement de placer l'ensemble des variables de l'écoulement, comme la pression et les différentes composantes de vitesse, sur les mêmes nœuds. Cette approche présente cependant l'inconvénient d'amplifier fortement les modes les plus élevés de la grille ( $kh \approx \pi$ ) et génère des oscillations indésirables dans les champs de pression et de vitesse [31]. Ce problème peut être évité en plaçant la pression et les différentes composantes de vitesse sur des nœuds différents (arrangement de type « *staggered* »). Dans le code DNS, la pression est estimée au centre des mailles (du maillage

uniforme) tandis que les composantes du gradient de pression et de la vitesse sont évaluées sur les faces correspondantes. Il est important de souligner que, puisque les schémas de calcul sont appliqués dans le maillage uniforme, la notion de centre des mailles ou de centre des faces est relative au maillage régulier. La figure 3.5 montre le positionnement des variables dans le maillage uniforme (à gauche) et le positionnement correspondant dans le maillage irrégulier (à droite).

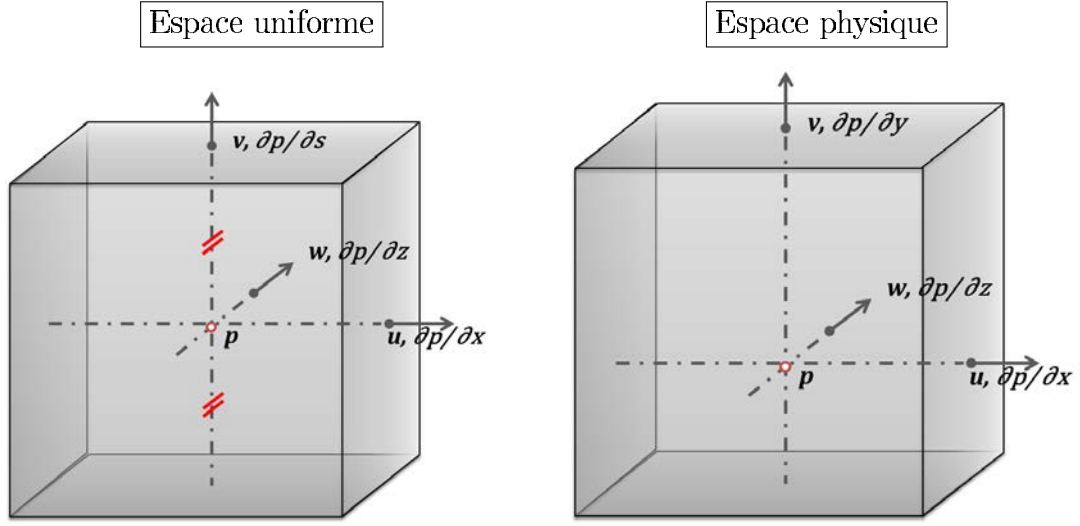


FIGURE 3.5 – Position des variables dans un maillage de l'espace uniforme (droite) et une maille de l'espace physique (gauche)

### 3 Résolution numérique

L'intégration temporelle de l'équation 3.5 donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dt = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial P}{\partial x_i} dt - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial p'}{\partial x_i} dt - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u_i u_j}{x_j} dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{Re_P} \Delta u_i dt \quad (3.9)$$

Dans le cas général, l'avancement temporel de la solution de l'itération  $n$  à l'itération  $n+1$  peut être effectué en plusieurs sous-étapes (utilisation d'un schéma de Runge-Kutta, par exemple) :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + T_{pmoy} + T_{pfluc} + T_{Adv} + T_{Diff} \quad (3.10)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 T_{pmoy} &= - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial P}{\partial x_i} dt \\
 T_{pfluc} &= - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} dt \\
 T_{Adv} &= - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial u_i u_j}{x_j} dt \\
 T_{Diff} &= \frac{1}{Re_P} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta u_i dt
 \end{aligned}$$

L'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  est alors découpé en  $n_k$  morceaux ( $t_1 = t, t_2, \dots, t_k, \dots, t_{n_k+1} = t + \Delta t$ ).

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes consiste donc à estimer des différents termes de cette relation. Dans le code DNS, les termes d'advection et de diffusion  $T_{Adv}$  et  $T_{Diff}$  peuvent être approximés selon le schéma explicite d'Adam-Bashforth d'ordre 2 ou selon un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3. Le terme  $T_{pfluc}$ , associé aux fluctuations de la pression autour de sa moyenne spatiale, sera déterminé selon l'approche du pas fractionné afin de satisfaire la condition d'incompressibilité de l'écoulement. Enfin, l'estimation du terme associé à la moyenne spatiale de la pression,  $T_{pmoy}$ , sera effectuée en imposant la conservation du débit.

Le but de cette partie est de présenter les méthodes numériques utilisées. Le choix de l'utilisation d'une méthode explicite pour les termes de diffusion au lieu d'une méthode implicite (méthode de Crank-Nicholson) habituellement utilisée pour ces termes sera également justifié.

### 3.1 Calcul des termes d'advection et de convection

En raison de leur nature non-linéaire, le calcul des termes d'advection ne peut se faire que selon une méthode explicite n'impliquant que les champs de vitesse connus à l'itération courante où aux itérations précédentes. En revanche, la nature linéaire des termes de diffusion autorise l'utilisation de méthodes implicites telles que la méthode de Crank-Nicholson.

On distingue alors deux grandes approches selon que la méthode d'avancement temporel utilisée pour les termes de diffusion est, comme pour les termes d'advection, de nature explicite (approche *explicite pure*) ou de nature implicite (approche

*semi-implicite*).

Nous verrons dans cette partie que l'approche semi-implicite utilisée dans le code DNS initial offre généralement une stabilité accrue mais que ses effets sur le coût numérique ne sont pas négligeables et dépendent étroitement des schémas de calcul utilisés. La pertinence de cette approche sera donc reconsidérée dans le contexte de la nouvelle version du code numérique utilisant des schémas de calcul plus complexes.

### 3.1.1 Approche explicite pure

Comme indiqué précédemment, l'approche explicite pure repose sur l'utilisation de méthodes d'avancement temporel explicites pour les termes d'advection et de diffusion ( $T_{Diff}$  et  $T_{Adv}$ ) de l'équation de Navier-Stokes. En utilisant les formes discrétisées  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{L}$  des opérateurs divergence et laplacien, les termes d'advection et de convection sont approximés par :

$$T_{Adv} + T_{Diff} = \alpha_k \Delta t \left( -\mathcal{D}u_i \mathbf{u} + \frac{1}{Re_P} \mathcal{L}u_i \right)^k + \beta_k \Delta t \left( -\mathcal{D}u_i \mathbf{u} + \frac{1}{Re_P} \mathcal{L}u_i \right)^{k-1}$$

Dans le code DNS, l'avancement temporel peut être effectué selon le schéma d'Adam-Bashforth d'ordre 2 ou selon le schéma de type Runge-Kutta d'ordre 3 (RK3) proposé par Spalart et al [32]. Les valeurs des coefficients sont  $\alpha_{1,2,3} = [\frac{8}{15}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}]$  et  $\beta_{1,2,3} = [0, -\frac{17}{60}, -\frac{5}{12}]$  pour le schéma de Runge-Kutta utilisé. Dans le cas du schéma d'Adam-Bashforth défini par  $\alpha_1 = [\frac{3}{2}]$  et  $\beta_1 = [-\frac{1}{2}]$ , l'avancement temporel est effectué en une seule étape ( $n_k = 1$ ) à partir du champ de vitesse à l'itération courante et à l'itération précédente (exposant  $k - 1$  dans l'expression ci-dessus).

### 3.1.2 Approche semi-implicite

L'approche semi-implicite, adoptée dans la version initiale du code DNS, repose sur l'utilisation conjointe de méthodes d'avancement explicites pour les termes d'advection de l'équation de Navier-Stokes (termes d'advection) et de méthodes implicites pour les termes de diffusion. Les termes d'advection sont approximés par la méthode d'Adam-Bashforth ou RK3 :

$$T_{Adv} = \alpha_k \Delta t (-\mathcal{D}u_i \mathbf{u})^k + \beta_k \Delta t (-\mathcal{D}u_i \mathbf{u})^{k-1}$$

La méthode de Crank-Nicholson est alors souvent utilisée pour les termes de

diffusion en raison de son caractère inconditionnellement stable :

$$T_{Diff} = \frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} \mathcal{L} (u_i^k + u_i^{k+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

où  $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$ .

Cette approche confère à la solution numérique une stabilité accrue par rapport à l'approche explicite pure, particulièrement dans le cas d'écoulements peu turbulents. En effet, certaines méthodes implicites telles que la méthode de Crank-Nicholson se révèlent inconditionnellement stables lorsqu'elles sont appliquées à une équation modèle de nature diffusive. Les méthodes d'avancement implicites semblent donc être un choix particulièrement intéressant pour l'avancement des termes de diffusion.

Toutefois, l'utilisation de méthodes implicites comporte un coût qui, s'il est tout à fait acceptable dans le code initial, demande à être évalué dans le contexte du nouveau code en raison des nouveaux schémas de calcul utilisés (plus complexes). À cette fin, on considère l'équation discrétisée en temps dans laquelle les termes diffusifs sont avancés selon l'approche de Crank-Nicholson (ordre 2). Pour simplifier, les autres termes de l'équation sont regroupés dans le terme  $T$  :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} \mathcal{L} (u_i^k + u_i^{k+1}) + T$$

En posant  $\mathcal{M} = \left( \mathbf{I} - \frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} \mathcal{L} \right)$ , le champ de vitesse à la sous-étape  $k+1$  est donné par :

$$\mathcal{M} u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} \mathcal{L} u_i^k + T$$

Par ailleurs, dans l'hypothèse d'un nombre de Reynolds élevé, le terme  $\frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} \mathcal{L} u_i^{k+1}$  est négligeable devant  $u_i^{k+1}$ . On peut donc effectuer l'approximation d'ordre 3 :

$$\mathcal{M} u_i^{k+1} = \left( \mathbf{I} - \frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) \right) u_i^{k+1} = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3 u_i^{k+1} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (3.11)$$

avec  $\mathcal{M}_i = \left( \mathbf{I} - \frac{\gamma_k \Delta t}{2Re_P} \mathcal{L}_i \right)$ . La résolution de l'équation à l'étape suivante  $k+1$  s'effectue alors par trois résolutions successives (une pour chaque matrice  $\mathcal{M}$ ) dont le coût dépend fortement de la nature des matrices et donc des schémas utilisés pour l'opérateur laplacien discrétisé.

Afin de ne pas réduire la portée de cette étude, on s'intéresse au cas général des schémas compacts (on rappelle que les schémas explicites sont un cas particulier de schémas compacts). Avec les notations du chapitre précédent, l'opérateur  $\mathcal{L}_i$  peut s'écrire :  $\mathcal{L}_i = \mathcal{A}_i^{-1}\mathcal{B}_i$ .

La première inversion porte sur la matrice  $\mathcal{M}_1$  qui comporte, du fait de la nature globale des schémas compacts, un très grand nombre de coefficients. La complexité du système peut toutefois être réduite en multipliant chaque côté de l'équation 3.11 par  $\mathcal{A}_1$ . Soit, en posant  $u^{23} = \mathcal{M}_2\mathcal{M}_3u_i^{k+1}$  :

$$\mathcal{A}_1\mathcal{M}_1u^{23} = \mathcal{A}_1\left(u_i^k + \frac{\gamma_k\Delta t}{2Re_P}\mathcal{L}u_i^k\right)$$

La matrice  $\mathcal{A}_1\mathcal{M}_1$  étant définie par :

$$\mathcal{A}_1\mathcal{M}_1 = \mathcal{A}_1\left(\mathbf{I} - \frac{\gamma_k\Delta t}{2Re_P}\mathcal{L}_1\right) = \left(\mathcal{A}_1 - \frac{\gamma_k\Delta t}{2Re_P}\mathcal{B}_1\right)$$

On procède ensuite de manière analogue avec les matrices  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  pour déterminer le champ de vitesse à l'étape  $k + 1$ . Le coût de chacune des trois étapes de résolution dépendra évidemment de la nature des matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

Dans le code initial, l'utilisation d'un schéma explicite d'ordre 2 impliquant seulement le point voisin gauche et le point voisin droit du point d'intérêt confère à la matrice  $\mathcal{B}$  une forme tri-diagonale. Par ailleurs, en raison de la nature explicite du schéma, la matrice  $\mathcal{A}$  est équivalente à la matrice unité. Les matrices  $\mathcal{M}_i$  résultantes sont donc de nature tri-diagonale et par conséquent parfaitement adaptées à des algorithmes de résolution efficaces tels que la décomposition LU. L'approche implicite avait donc été adoptée en raison de sa stabilité et de son coût numérique acceptable.

Dans le cas des schémas compacts ou des schémas explicites optimisés, le nombre de points voisins impliqués dans le calcul du laplacien est sensiblement plus important (entre 3 à 6 points). Les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont donc beaucoup plus complexes et rendent l'inversion du système numériquement très coûteuse. L'approche semi-implicite n'est donc pas utilisée dans la nouvelle version du code.

### 3.1.3 Conclusions

L'approche explicite pure sera donc adoptée dans la nouvelle version du code en raison de son coût numérique réduit et de sa généricité. Bien que, dans l'absolu, les



schémas explicites offrent une stabilité moindre, l'utilisation de tels schémas n'affecte pas sévèrement la stabilité globale de la solution numérique dans le contexte de cette étude. En effet, dans le cas des écoulements à grand nombre de Reynolds, les termes d'advection deviennent prédominants. Ainsi, la taille du pas de temps est davantage déterminée par la discrétisation des termes d'advection que par celle des termes de diffusion. L'adoption d'une stratégie explicite pure ne devrait donc pas être pénalisante pour le temps de calcul.

### 3.2 Contrainte d'incompressibilité

Le terme associé aux fluctuations de pression  $T_{pfluc}$  est estimé à partir de la composante  $p'$  de la pression aux étapes  $k$  et  $k + 1$  selon la relation :

$$T_{pfluc} = \gamma_k \Delta t \mathcal{G}_i (ap'^k + bp'^{k+1})$$

où  $\mathcal{G}_i$  désigne la composante  $i$  de l'opérateur gradient discrétisé. Ainsi, si on regroupe tous les autres termes dans le terme  $T$ , l'équation 3.10 peut alors s'écrire :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \gamma_k \Delta t \mathcal{G}_i (ap'^k + bp'^{k+1}) + T \quad (3.12)$$

On notera que pour des raisons de stabilité, le terme de pression est estimé selon l'approximation d'ordre 1 ( $a = 0, b = 1$ ), l'approximation d'ordre 2 donnée par ( $a = b = \frac{1}{2}$ ) étant beaucoup moins stable [9]. La composante  $p'^{k+1}$  de la pression à la prochaine étape est déterminée de façon à satisfaire la condition d'incompressibilité de l'écoulement selon la méthode du *pas fractionné*. Dans un souci de simplification et de concision, on présentera seulement la méthode du pas fractionné appliquée au cas où l'avancement temporel des termes d'advection et de diffusion est effectué selon l'approche explicite pure. Le lecteur intéressé pourra trouver une description plus générale de cette approche dans la littérature [33].

Dans un premier temps, la méthode du pas fractionné consiste à effectuer une première estimation du champ de vitesse à la prochaine étape (que l'on notera  $\tilde{\mathbf{u}}$ ) en ne considérant que le terme de pression à l'étape courante :

$$\tilde{u}_i = u_i^k + a\gamma_k \Delta t \mathcal{G}_i p^k + T \quad (3.13)$$

Le champ de vitesse  $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$  à l'étape suivante est alors donné par :

$$u_i^{k+1} = \tilde{u}_i + b\gamma_k \Delta t \mathcal{G}_i p'^{k+1} \quad (3.14)$$

Le calcul du champ de vitesse intermédiaire  $\tilde{\mathbf{u}}$  n'implique que des quantités connues et ne pose donc pas de problème particulier. La seconde étape de la méthode du pas fractionné consiste à déterminer le champ de pression à l'étape suivante  $p'^{k+1}$  nécessaire à l'estimation de  $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$ . Cette étape est réalisée en appliquant la contrainte d'incompressibilité à l'équation 3.14 :

$$\mathcal{D}\mathbf{u}^{k+1} = \mathcal{D}\tilde{\mathbf{u}} + b\gamma_k \Delta t \mathcal{D}\mathcal{G}p'^{k+1} = 0 \quad (3.15)$$

$p'^{k+1}$  peut alors être obtenu en résolvant l'équation de Poisson issue de l'équation 3.15 :

$$\mathcal{L}p'^{k+1} = -\frac{\mathcal{D}\tilde{\mathbf{u}}}{b\gamma_k \Delta t} \quad (3.16)$$

La pression  $p'^{k+1}$  ainsi obtenue peut ensuite être injectée dans la relation 3.14 afin de déterminer le champ de vitesse à la prochaine étape de l'avancement temporel. Il est important de préciser que l'opérateur laplacien utilisé dans l'équation 3.16 doit nécessairement être défini comme une combinaison des opérateurs discrétisés  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{G}$  afin d'assurer la cohérence des équations 3.15 et 3.16.

Dans le code DNS, la résolution de cette équation peut être effectuée selon une approche purement spectrale ou selon une approche hybride. L'approche hybride, initialement utilisée, consiste à conjuguer une résolution spectrale (dans les directions périodiques  $x$  et  $z$ ) avec une résolution dans l'espace physique pour la direction  $y$ , non périodique. L'équation 3.16 est décomposée dans l'espace de Fourier selon les directions  $x$  et  $z$ . Le système linéaire ainsi obtenu doit alors être résolu pour chaque mode  $k_x, k_z$  :

$$(k_x^{(\mathcal{D})}k_x^{(\mathcal{G})} + \mathcal{M}_y^{(\mathcal{D})}\mathcal{M}_y^{(\mathcal{G})} + k_z^{(\mathcal{D})}k_z^{(\mathcal{G})})\hat{p}^{k+1}(k_x, y, k_z) = \hat{D}(k_x, y, k_z) \quad (3.17)$$

où  $k_x^{(\mathcal{O})}$  et  $k_z^{(\mathcal{O})}$  sont les nombres d'onde modifiés des schémas utilisés pour l'opérateur  $\mathcal{O}$  dans les directions  $x$  et  $z$  et  $\mathcal{M}_y^{(\mathcal{O})}$  est la matrice associée au schéma utilisé dans la direction  $y$  pour l'opérateur  $\mathcal{O}$ . Les notations  $\hat{p}^{k+1}$  et  $\hat{D}$  dénotent les transformées de Fourier de la pression  $p'^{k+1}$  et du côté droit de l'équation 3.16. Les schémas de calcul utilisés dans la direction  $y$  pour les opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{G}$  sont donnés dans la

section 4.6 de l'annexe A.

L'utilisation de la transformation de Laizet permet de résoudre l'équation 3.16 selon l'approche spectrale pure utilisée par Laizet et al. [30] qui sera décrite en détail dans le chapitre 5. Cette approche présente l'intérêt de pouvoir être appliquée à de nombreuses conditions aux limites et ainsi de permettre l'étude de configurations d'écoulement variées. L'essentiel des simulations réalisées dans ce travail ont été réalisées selon l'approche hybride, l'approche spectrale pure n'ayant été implémentée que tardivement. Par la suite, l'approche hybride sera donc considérée comme l'approche par défaut et seule l'utilisation de l'approche spectrale pure sera explicitement mentionnée.

### 3.3 Contrainte de conservation du débit

La contrainte de conservation du débit s'obtient en intégrant l'équation de Navier-Stokes sur la vitesse longitudinale sur l'ensemble du domaine de calcul :

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int -\frac{\partial u u_j}{x_j} dV - \int \frac{\partial P}{\partial x} dV - \int \frac{\partial p'}{\partial x} dV + \frac{1}{Re_P} \int \Delta u dV = 0$$

La périodicité des conditions aux limites selon les directions  $x$  et  $z$  ainsi que l'absence de vitesse aux parois impliquent l'annulation de l'intégrale des termes d'advection. Par ailleurs, d'après la définition des composantes  $P$  et  $p'$  de la pression  $p$  :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial P}{\partial x} dV &= \frac{\partial P}{\partial x} \\ \int \frac{\partial p'}{\partial x} dV &= 0 \end{aligned}$$

La condition de conservation du débit se traduit donc par :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{V} \frac{1}{Re_P} \int \Delta u dV \quad (3.18)$$

Ainsi le terme  $T_{pmoy}$  de la relation 3.10 s'écrit :

$$T_{pmoy} = - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial P}{\partial x} dt = \frac{1}{Re_P} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \int \Delta u dV \right) dt$$

Dans le code DNS, ce terme est estimé selon la méthode d'Euler (ordre 1) à partir du champ de vitesse à l'étape courante :

$$T_{pmoy} = \frac{\Delta t}{Re_P} \int \mathcal{L} u^k dV + \mathcal{O}(\Delta t)$$

### 3.4 Implémentation

En guise de conclusion, on se propose de décrire, dans les grandes lignes, l'algorithme de résolution implémenté afin d'offrir au lecteur une mise en perspective des différents aspects du code. Le code DNS s'articule autour de deux grandes phases, l'initialisation et la phase itérative effectuant la résolution temporelle des équations de Navier-Stokes. La phase d'initialisation comprend essentiellement la définition du maillage ainsi que le chargement des schémas de calcul utilisés. La version actuelle du code implémente trois grands ensembles de schémas : les schémas explicites classiques d'ordre 2, les schémas explicites optimisés ainsi que les schémas compacts.

La phase itérative comporte les étapes suivantes :

#### 1. Calcul des termes de l'équation de Navier-Stokes à l'étape $k$

La figure 3.6 propose une vue du positionnement des termes pour la vitesse longitudinale  $u$ . Les schémas utilisés pour leur estimation sont également indiqués. On rappelle que, pour plus de clarté, les schémas de calculs sont désignés selon le modèle : D[ordre de la dérivée][type d'arrangement de points :  $s/c$  pour staggered/collocated].

- (a) Calcul des produits de vitesses ( $uv$ ,  $uw$ , etc.) au centre des arrêtes des mailles à partir des schémas d'interpolation D0s. Par exemple, le terme  $uv$  est obtenu par interpolation de  $u$  selon la direction  $y$  et par interpolation de  $v$  selon la direction longitudinale  $x$
- (b) Calcul des termes d'advection. Les dérivées des produits de vitesses sont évaluées par le schéma D1s (dérivée première sur un arrangement de type staggered)
- (c) Calcul des termes de diffusion à partir du schéma D2c. D'après la relation 3.8, cette estimation requiert également l'utilisation du schéma D1c pour

la direction  $y$ .

- (d) Calcul du gradient de pression local  $\mathbf{grad}(p')$  à partir du schéma D1s. Le gradient de pression moyen selon  $x$  ( $\partial P/\partial x$ ) est ajusté afin d'assurer la conservation du débit d'après la relation 3.18

## 2. Avancement temporel selon le schéma d'Adam-Bashforth ou RK3

- (a) On stocke, dans un tableau (AV), la somme des termes d'advection et de diffusion qui sera utilisée pour effectuer l'avancement temporel
- (b) Mise à jour de la vitesse intermédiaire  $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  selon l'équation incomplète 3.13 avec  $T = \alpha_k \times AV + \beta_k \times \text{previousAV}$  où previousAV est un tableau contenant les valeurs du tableau AV à la précédente itération
- (c) Sauvegarde du tableau AV dans le tableau previousAV

## 3. Calcul de la vitesse à l'étape $k+1$

- (a) Calcul du champ de pression à l'étape suivante par résolution de l'équation 3.16 selon l'approche hybride ou l'approche spectrale pure [30]
- (b) Correction de la vitesse selon la relation 3.14

## 4. Test de la divergence

On s'assure que la condition d'incompressibilité est bien respectée (divergence du champ de vitesse nulle)

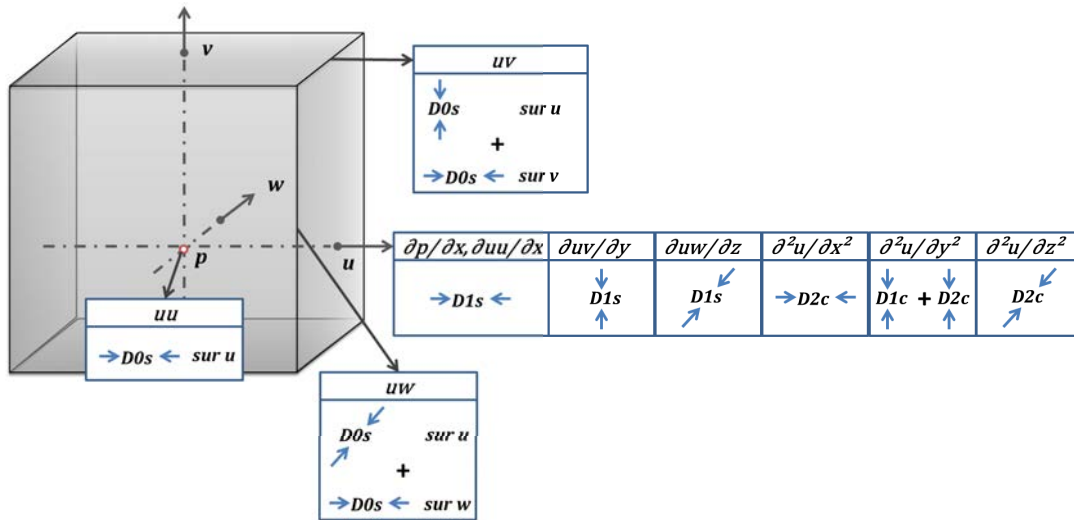


FIGURE 3.6 – Positionnement des termes de l'équation de Navier-Stokes dans le cas de la composante longitudinale  $u$  de la vitesse. Les schémas de calcul utilisés pour chaque terme sont également indiqués.

# Chapitre 4

## Utilisation de schémas à haute précision : validation et performances du code

### 1 Introduction

La simulation numérique directe d'écoulements modérément turbulents est extrêmement coûteuse en ressources informatiques et exige un soin particulier dans le choix de la stratégie numérique. En particulier, dans le cas d'un code à différences finies, la précision des schémas de calcul utilisés est un point très important qui conditionne la résolution du maillage utilisé et donc le coût numérique.

Les différents types de schémas présentés dans le chapitre 2 ont été intégrés au code DNS à travers trois configurations : une configuration utilisant des schémas standards d'ordre 2 (O2), une configuration explicite optimisée (EXPOPT) et une configuration compacte (CPT). Ce chapitre se propose de présenter en détail les différents schémas utilisés pour chaque configuration puis d'en étudier les qualités spectrales. L'implémentation des différentes configurations sera ensuite validée à travers la simulation d'un écoulement modérément turbulent et une analyse comparative des résultats obtenus sera effectuée afin d'établir la configuration la plus pertinente pour les simulations ultérieures. Enfin, les performances parallèles du code seront finalement étudiées afin d'évaluer la capacité du code à s'exécuter efficacement sur la machine de calcul utilisée pour les simulations à venir.

## 2 Schémas utilisés

Pour une meilleure compréhension, on se propose de définir dans la figure 4.1 les différents sites, à l'intérieur d'une maille dans lesquels les différentes quantités de l'équation de Navier-Stokes discrétisée seront exprimées.

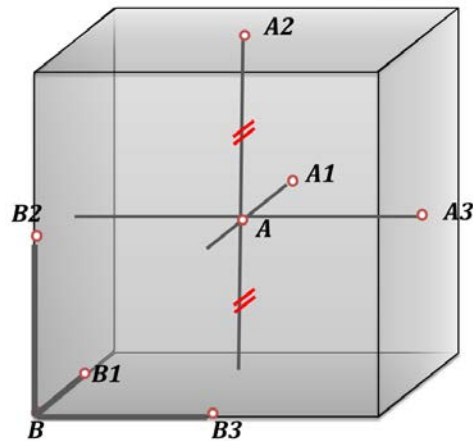


FIGURE 4.1 – Vue des différents sites où les termes de l'équation de Navier-Stokes sont calculés dans une maille 3D

Les schémas utilisés pour les directions  $x$  et  $z$  sont indépendants du point considéré du fait de la périodicité dans ces directions. En revanche, dans la direction  $y$  la présence de parois impose l'utilisation de schémas particuliers dans le cas des configurations EXPOPT et compactes, utilisant un voisinage plus réduit (et donc moins précis), du fait de l'absence de points au-delà des limites du domaine. Notons que la configuration O2 n'est pas impactée par ce « manque » de points à proximité des parois du fait du voisinage réduit des schémas standards d'ordre 2 (limité à deux points voisins).

La configuration compacte reprend l'approche généralement utilisée dans la littérature et utilise des schémas compacts décentrés à proximité immédiate des parois. Dans les directions  $x$  et  $z$  ainsi que pour les points intérieurs de la direction  $y$ , des schémas compacts classiques d'ordre 6 sont utilisés pour les opérateurs D0s, D1s et D2c. La littérature propose de nombreux schémas optimisés pour le calcul de la dérivée première sur une grille « collocated » (D1c). Le schéma proposé par Kim et al. [34] sera utilisé du fait de sa très bonne résolution spectrale et son coût numérique limité. La configuration explicite optimisée utilise des schémas explicites standards d'ordre 2 et 4 pour les deux premières mailles (et les deux dernières) puis des sché-

mas optimisés de précision croissante pour les mailles plus éloignées. Les schémas « internes », utilisés pour tous les points dans les directions  $x$  et  $z$  et pour les points intérieurs dans la direction  $y$ , ont été dérivés selon une approche mixte dans laquelle les  $N_c$  coefficients sont déterminés à partir d'un jeu de contraintes mixtes comportant deux contraintes de Taylor de façon à garantir l'ordre 4 et  $N_c - 2$  contraintes « spectrales » imposant une erreur nulle pour certaines valeurs de  $kh$ .

Les sections 4.3 à 4.5 de l'annexe A donnent une description détaillée des schémas D0s, D1s, D1c et D2c utilisés dans la direction  $y$  en fonction de l'indice  $j$  de la maille considérée pour chacune des configurations du code. On notera que dans le cas du schéma D0s appliqué dans la direction  $y$ , le cas  $j = 1$  correspond aux sites B1 et B3 de la première maille, situés sur la paroi et le schéma n'est donc appliqué qu'à partir de  $j = 2$ .

## 3 Analyse spectrale

### 3.1 Précision des schémas

Les figures 4.2 et 4.3 montrent la précision des schémas utilisés pour les opérateurs D0s, D1s, D1c et D2c des configurations compacte et explicite optimisée en fonction du produit  $kh$ . Les indices sur les courbes correspondent à l'indice des mailles selon la direction  $y$ . On remarque que dans les cas D0s, D1s et D2c, les schémas de la configuration EXOPT présentent une résolution spectrale légèrement meilleure que celle des schémas de la configuration compacte. Cette différence s'explique par le fait que les schémas compacts utilisés sont des schémas standards dérivés selon l'approche de Taylor. Les schémas compacts et explicites optimisés utilisés pour l'opérateur D1c ont en revanche été dérivés selon une approche spectrale et présentent tous deux d'excellentes qualités spectrales.

### 3.2 Stabilité et qualités DRP

La résolution spectrale est un critère purement spatial et ne permet donc pas d'évaluer la qualité globale de la solution numérique qui dépend également de la méthode d'avancement temporel utilisée. En raison de la nature essentiellement convective des écoulements turbulents, on se propose d'étudier les propriétés spatiales et temporelles de la solution numérique à travers l'approche utilisée par Sengupta [14] décrite dans le chapitre 2, basée sur l'étude de l'équation d'onde. Les figures 4.4 et 4.5 montrent respectivement le facteur d'amplification et la vitesse de groupe de



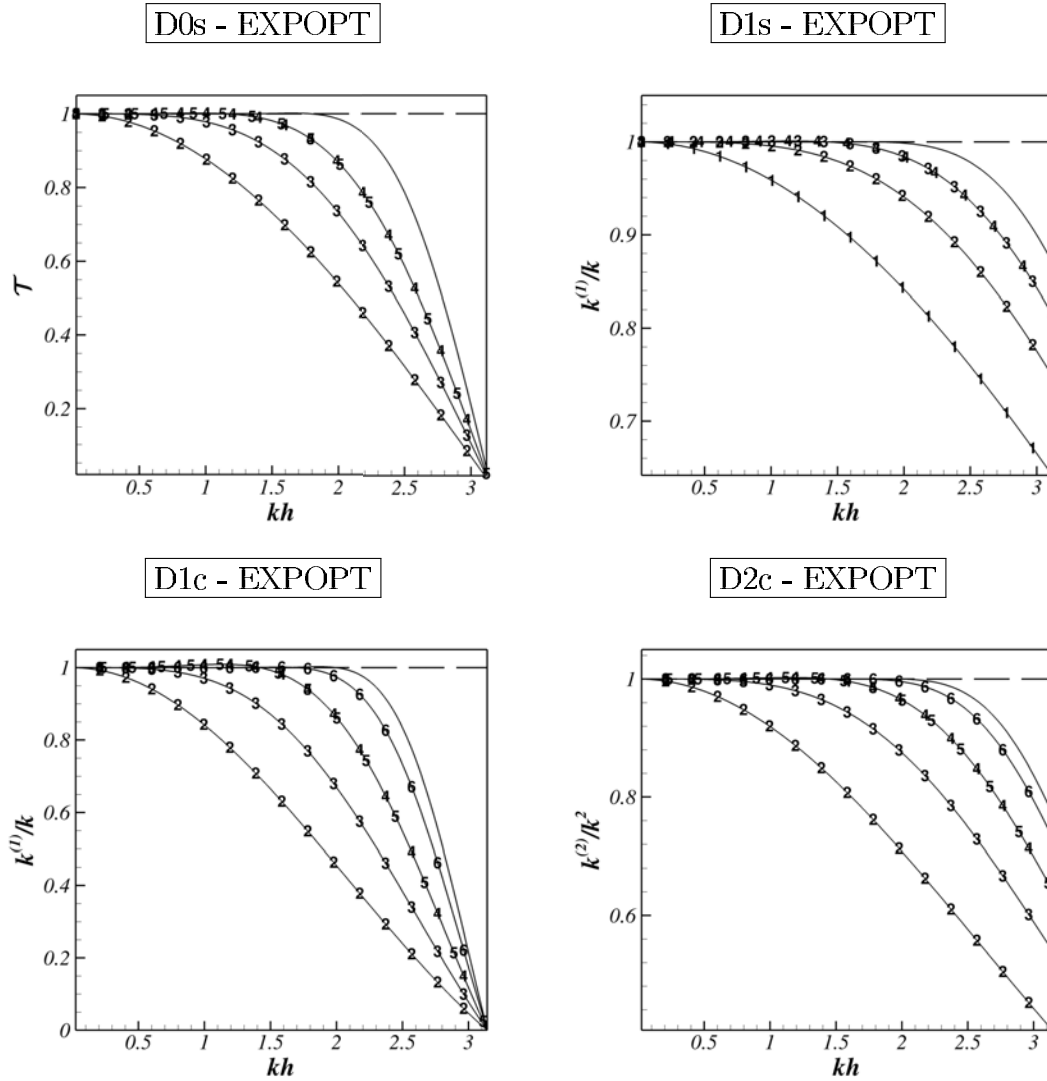


FIGURE 4.2 – Précision des schémas D0s, D1s, D1c et D2c de la configuration explicite optimisée

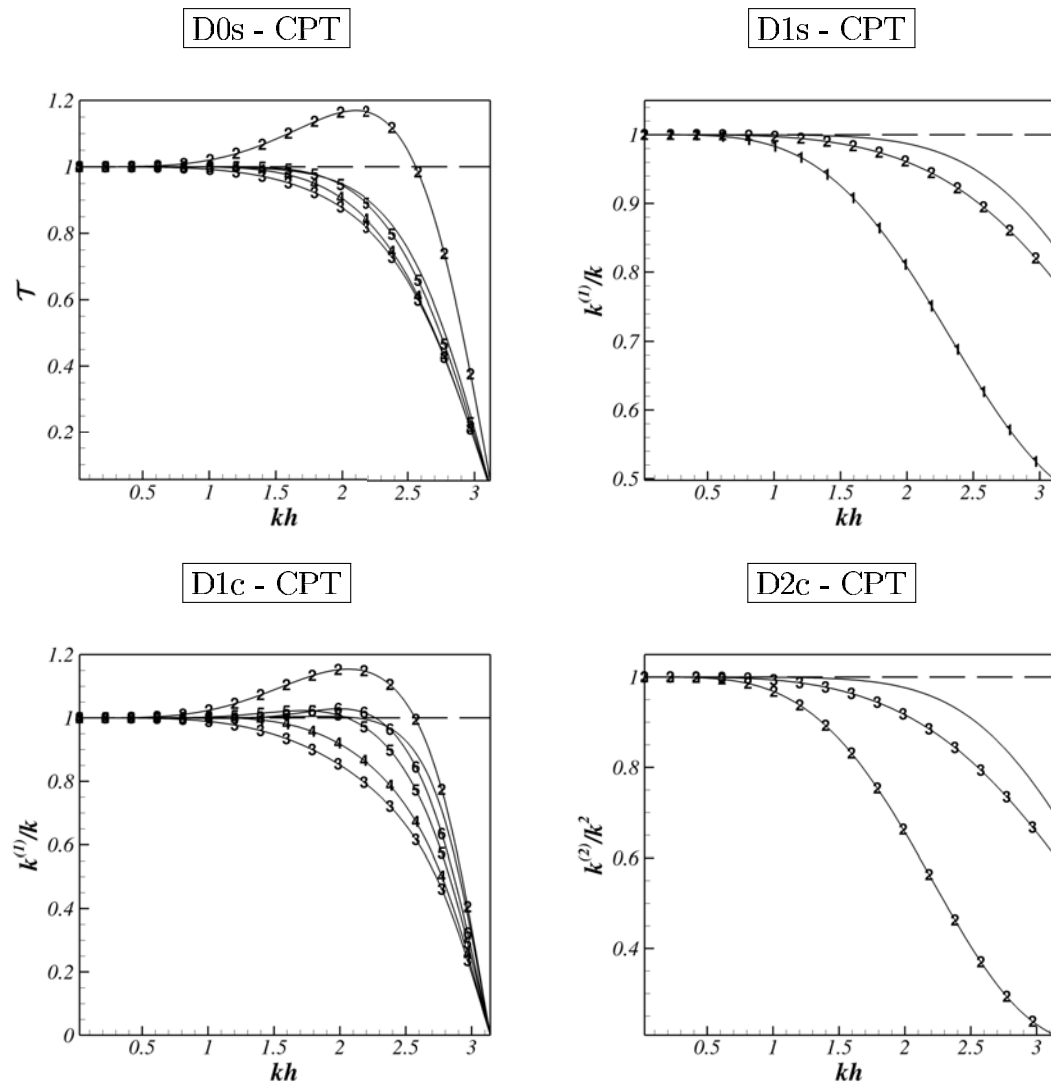


FIGURE 4.3 – Précision des schémas D0s, D1s, D1c et D2c de la configuration compacte

la solution numérique en fonction du produit  $kh$  et du nombre CFL pour les schémas D1s (utilisés pour la discrétisation spatiale des termes convectifs) combinés avec un avancement temporel selon le schéma d'Adam-Bashforth (à gauche) ou selon le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (à droite) donné dans la section 3.1.1 du chapitre 3. On rappelle que le CFL est un critère de stabilité pour les équations de nature convective défini par :

$$CFL = \frac{c\Delta t}{h} = \frac{\omega\Delta t}{kh} \quad (4.1)$$

dans le cas de la propagation d'une onde de pulsation  $\omega$  et de nombre d'onde  $k$  à la vitesse  $c$ . On notera que les facteurs d'amplification obtenus pour les schémas D1s d'ordre 2 et compacts sont très similaires à ceux des schémas explicites optimisés et ne sont donc pas montrés dans la figure 4.4.

L'observation des iso-courbes révèle que les schémas compacts et explicites optimisés permettent effectivement d'atteindre des  $kh$  élevés tout en conservant de bonnes qualités de stabilité et de respect de la relation de dispersion, comme pouvait le laisser supposer les résolutions spectrales élevées de ces schémas. Toutefois, on notera que le CFL idéal, garantissant une erreur inférieure à 5% sur la quantité considérée, diminue lorsque le  $kh$  augmente. L'utilisation optimale des schémas compacts et explicites optimisés (c'est-à-dire dans le cas où les  $kh$  maximum de la solution correspondent à la résolution spectrale) nécessite donc de réduire le pas de temps, la vitesse  $c$  étant déterminée par la physique de l'écoulement. Cependant, dans le cas d'un problème à trois dimensions, le coût en termes de nombre d'itérations et de nombre de points est proportionnel à  $C_{it} = 1/(CFL_{max}(kh)_{max}^3)$  et la réduction du pas de temps est largement compensée par la diminution du nombre de points. La valeur du facteur  $C_{it}$  indiquée dans la figure 4.5 est plus de 10 fois supérieure dans le cas de l'utilisation de schémas d'ordre 2. Le schéma explicite optimisé présente un coût légèrement inférieur au schéma compact, quelle que soit la méthode d'avancement considérée, du fait de sa résolution spectrale plus élevée.

Enfin, l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta se révèle légèrement plus avantageuse par rapport à la méthode d'Adam-Bashforth. En effet, bien que la méthode de Runge-Kutta décompose chaque itération en trois sous-itérations et ait donc un coût par itération trois fois supérieur à la méthode d'Adam-Bashforth, elle permet également d'utiliser de 3.3 à 3.7 fois moins d'itérations temporelles. Par ailleurs, bien que parfois utilisée dans la littérature (voir par exemple [35]), la méthode d'Adam-

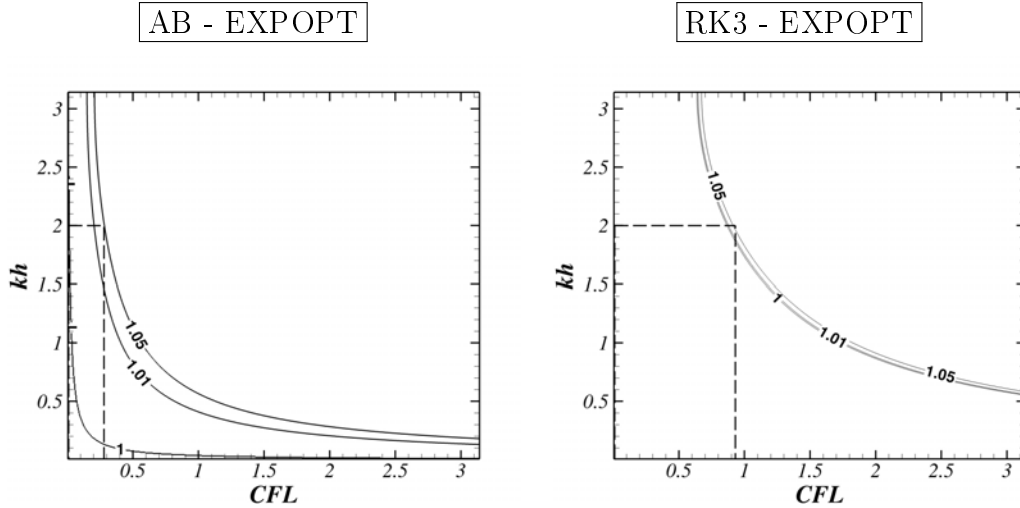


FIGURE 4.4 – Facteur d’amplification des schémas D1s de la configuration explicite optimisée combiné avec le schéma d’avancement temporel d’Adam-Bashforth d’ordre 2 (à gauche) et le schémas de Runge-Kutta d’ordre 3 (à droite). Les contours hachurés délimitent la zone  $(CFL_{max}, kh_{max})$  garantissant une bonne stabilité de la solution numérique

Bashforth induit la présence d’un mode non-physique dans la solution numérique, rapidement dissipé mais emportant avec lui une partie de la condition initiale [15]. Cette méthode est donc à éviter pour les problèmes dont la solution dépend fortement de l’état initial. La méthode de Runge-Kutta (qui ne présente pas de mode numérique) sera donc utilisée pour l’ensemble des simulations présentées dans ce travail.

### 3.3 Conclusion

Les schémas compacts et explicites optimisés implémentés présentent une résolution spectrale très élevée qui permet d’obtenir une bonne précision y compris sur des modes faiblement résolus par la grille ( $kh = 2$ ). A titre de comparaison, les schémas d’ordre 2 voient leur précision diminuer très rapidement au-delà de  $kh = 0.6$ . L’étude des propriétés spatio-temporelle de la solution numérique basée sur l’équation d’onde a permis de vérifier que l’utilisation des schémas compacts et explicites optimisés permettait de réaliser des économies substantielles (d’un facteur 10) sur le nombre d’itérations et de points de grille nécessaires pour résoudre l’équation d’onde. La méthode de Runge-Kutta présente un coût légèrement plus réduit que la méthode d’Adam-Bashforth et sera utilisée par la suite pour toutes nos simulations.

L’étude spectrale réalisée dans cette section est basée sur une équation d’onde

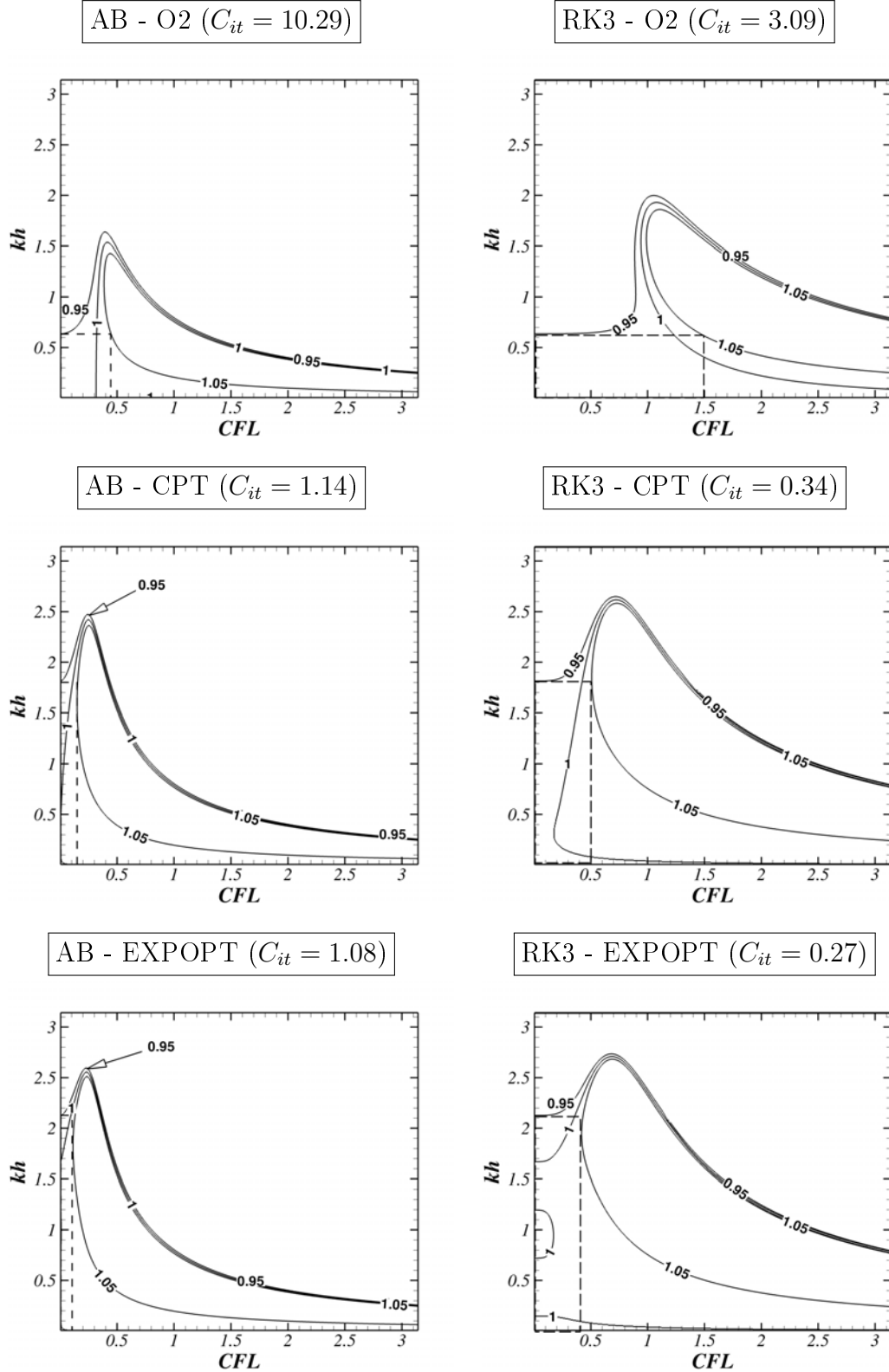


FIGURE 4.5 – Vitesse de groupe des schémas D1s combinés avec le schéma d'avancement temporel d'Adam-Bashforth d'ordre 2 (à gauche) et le schémas de Runge-Kutta d'ordre 3 (à droite). Les contours hachurés délimitent la zone ( $CFL_{max}, kh_{max}$ ) garantissant de bonnes propriétés DRP. Le nombre  $C_{it} = 1/CFL_{max}(kh)^3$  est également indiqué

supposée reproduire le comportement de l'équation de Navier-Stokes. Les résultats présentés ici ne constituent donc pas une démonstration définitive de la qualité des schémas pour cette étude, qui restent à être validés sur une vraie simulation, mais peuvent être considérés comme une première validation encourageante de la qualité des schémas implémentés.

## 4 Application à l'étude d'un écoulement turbulent

Les différentes configurations du code ont été utilisées pour la simulation d'un écoulement en canal faiblement turbulent à  $Re_\tau = 180$ . Les dimensions du domaine de calcul sont  $L_x = 4\pi h$ ,  $L_y = 2h$  et  $L_z = 4\pi h/3$  dans les directions longitudinale, verticale et transverse. Le facteur  $h$  désigne la demi-hauteur du canal. Des conditions périodiques sont appliquées dans les directions  $x$  et  $z$  afin de reproduire l'absence de contraintes dans ces directions. Une vitesse nulle est appliquée aux parois.

Deux maillages différents ont été utilisés afin d'évaluer la sensibilité des schémas à la résolution du maillage : une grille de résolution moyenne (G1) comportant  $129 \times 129 \times 129$  points et une grille plus grossière (G2) comportant  $129 \times 65 \times 65$  points dans les directions  $x, y$  et  $z$ . La taille des mailles dans les directions longitudinale et transverse est approximativement  $\Delta x^+ = 17$  et  $\Delta z^+ = 5$  pour la grille G1 et  $\Delta x^+ = 17$  et  $\Delta z^+ = 10$  pour la grille G2. Le maillage dans la direction  $y$  est déformé selon la transformation d'Orlandi (voir section 2.2.1 du chapitre 3) et la taille des mailles varie de  $\Delta y^+ = 0.5$  (aux parois) à  $\Delta y^+ = 5.5$  (au centre du canal) dans le cas de la grille moyenne et de  $\Delta y^+ = 1$  (aux parois) à  $\Delta y^+ = 11$  pour la grille grossière.

Les simulations ont été effectuées à partir d'un champ turbulent développé (dont les statistiques moyennes n'évoluent plus en temps). L'avancement temporel est effectué selon la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 avec un pas de temps  $\Delta t = 0.006$  (dans les unités du code) sur les deux maillages, ce qui correspond à un CFL relativement faible (0.25 sur la grille G1). L'expérience montre qu'une fenêtre de temps d'au moins 10 fois le temps de traversée d'une particule au centre du canal ( $T_{tr}$ ) est nécessaire à la convergence des statistiques. En raison du faible nombre de Reynolds considéré, les simulations ont été réalisées en quelques jours sur les supercalculateurs mis à notre disposition (Froggy et Turing). Les statistiques présentées ici ont donc été réalisées sur une fenêtre de temps beaucoup plus large d'environ 100  $T_{tr}$  à partir

de 150 champs 3D.

Les résultats de la grille G1 seront comparés avec les résultats de Moser [36] obtenus selon une approche spectrale avec une grille identique. Les résultats de la grille G2 seront ensuite comparés à ceux de la grille G1 afin d'évaluer l'effet de la dégradation du maillage sur la qualité des résultats obtenus pour les différentes configurations.

## 4.1 Réduction du repliement

Comme mentionné dans le chapitre 2, l'utilisation d'un maillage faiblement résolu au regard des modes composant la solution générique peut engendrer un phénomène de repliement (aliasing en anglais) par lequel le produit de modes à  $kh$  élevé intervenant dans l'expression des termes de convection peut engendrer des modes ne pouvant pas être résolus sur la grille et confondus par des modes de fréquence plus petite. L'analyse spectrale des fluctuations de vitesse menée par Vreman et al. [37] déconseille l'utilisation de maillage dont la taille dépasse sensiblement  $\Delta x^+ = 6$  et  $\Delta z^+ = 4$ . Ces critères d'absence d'aliasing ne sont clairement pas respectés dans le cas de la grille grossière. Il est à noter que la grille standard est trop faiblement résolue dans la direction  $x$  et n'est donc a priori pas exempte d'aliasing dans cette direction : le choix de cette taille de maille est délibéré et motivé par le souci de choisir une grille identique à celle utilisée par Moser et al. [36].

Les principales solutions permettant d'éliminer les oscillations factices ont été présentées en détail dans le chapitre 2. L'élimination par ajout d'une dissipation artificielle a été appliquée à travers l'utilisation d'un schéma explicite optimisé pour l'estimation des termes dissipatifs comportant une sur-dissipation pour les modes à  $kh$  élevé (concernés par l'aliasing). Le filtrage de la solution toutes les  $N_f$  itérations a également été testé. Le filtre utilisé, de type explicite, a été calibré de façon à n'éliminer que les fréquences les plus élevées. La figure 4.6 présente les caractéristiques spectrales du filtre et du schéma sur-dissipatif à travers la fonction de transfert (à gauche) et le nombre d'onde modifié (à droite) associés. L'annexe A propose une description détaillée du filtre (section 5.2) et du schéma sur-dissipatif (section 3.2) utilisés pour les deux approches testées.

Une simulation a été réalisée sur la grille standard sans réduction de l'aliasing. Sur la grille grossière G2, une simulation a été réalisée en utilisant l'approche sur-dissipative (G2-SURDISS) et trois autres en appliquant un filtrage toutes les 5, 50 et

100 itérations (G2-F5, G2-F50 et G2-F100). Une simulation (G2-AL) a été également effectuée sans méthode de réduction de l’aliasing afin de mesurer l’efficacité des méthodes testées. La figure 4.7 montre les spectres prémultipliés obtenus pour la vitesse longitudinale dans les directions  $x$  et  $z$  définis par :

$$S_{x_i}(k_{x_i}) = k_{x_i}^2 E_{uu}^{(x_i)} \quad (4.2)$$

où  $E_{uu}^{(x_i)} = \widehat{u}^{(x_i)} \widehat{u}^{*(x_i)}$  correspond au spectre dans la direction  $x_i$  de la vitesse longitudinale  $u$ , défini par le produit de la transformée de Fourier discrète de  $u$  dans la direction  $x_i$  ( $\widehat{u}^{(x_i)}$ ) avec la transformée conjuguée  $\widehat{u}^{*(x_i)}$ . Les spectres issus de la grille G1 et G2 sont comparés aux spectres obtenus sur une grille très fine (GTF) comportant  $1025 \times 257 \times 257$  points ainsi qu’avec ceux de Vreman et al. [37] également obtenus sur une grille très fine ( $513 \times 257 \times 257$ ). Les spectres obtenus sur ces grilles peuvent être considérés comme dépourvus de tout effet d’aliasing du fait de la taille très réduite des mailles ( $\Delta x^+ = 2$  et  $\Delta z^+ = 3$  pour la grille GTF). La configuration explicite optimisée a été utilisée pour toutes ces simulations.

Dans la direction  $x$ , les grilles G1 et G2 ont une résolution nettement inférieure à la limite acceptable et on observe la présence d’une queue vers les grands  $kh$ , due au repliement des modes non résolus dans cette zone. Cette queue est également particulièrement marquée dans la direction  $z$  en ce qui concerne le cas G2-AL. L’utilisation d’un schéma sur-dissipatif (cas G2-SURDISS) ne semble pas avoir d’effet significatif sur l’aliasing, la queue étant seulement très légèrement réduite par rapport au cas G2-AL dans la direction  $z$ . A l’opposé, le filtrage de la solution toutes les 5 et 50 itérations se révèle trop agressif et conduit à une sous-représentation des modes à  $kh$  élevés dans les spectres G2-F5 et G2-F50.

L’application du filtre toutes les 100 itérations produit de très bons résultats et permet de se rapprocher de manière satisfaisante du spectre obtenu sur la grille très fine. On notera par ailleurs que le surcoût numérique induit est très réduit, le filtrage n’étant appliqué que toutes les 100 itérations. C’est donc cette approche qui sera considérée pour la grille G2 par la suite.



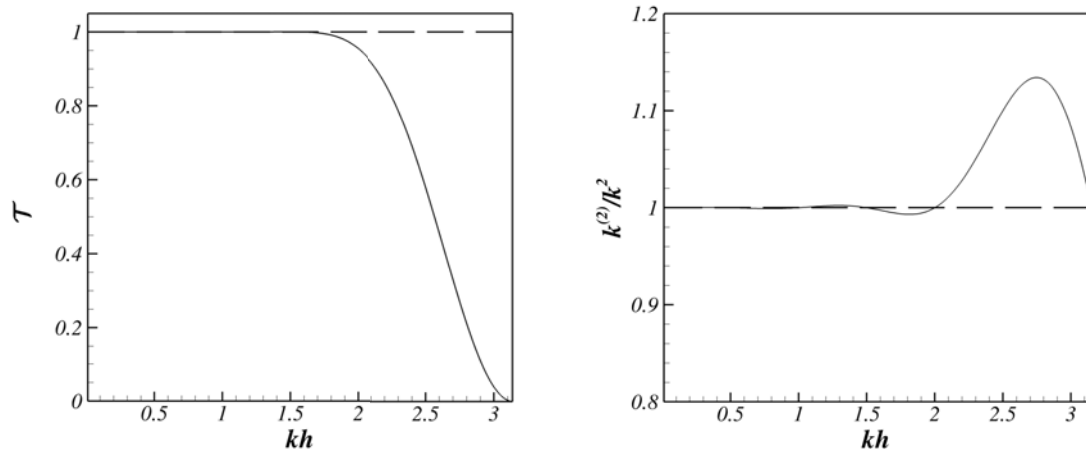


FIGURE 4.6 – Fonction de transfert du filtre explicite optimisé (à gauche) et nombre d'onde modifié normalisé du schéma de dérivée seconde sur-dissipatif (à droite)

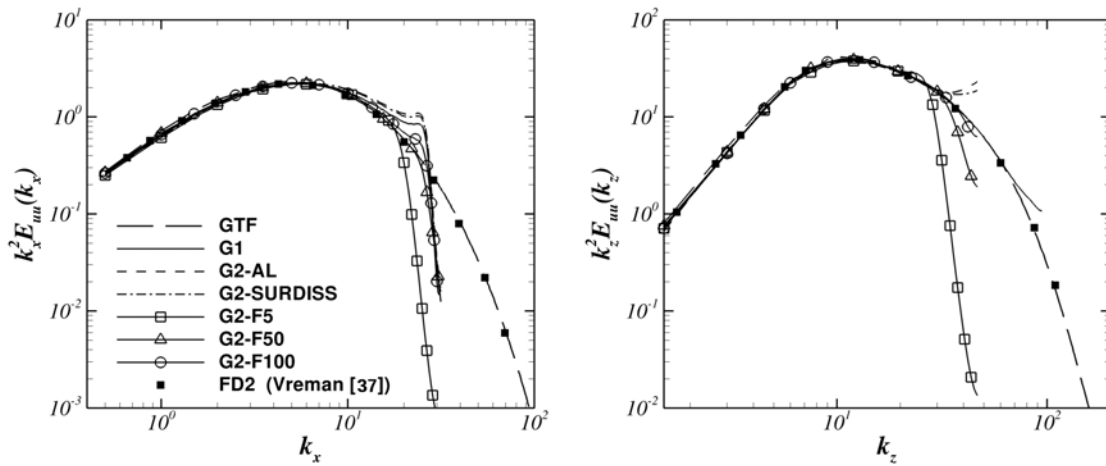


FIGURE 4.7 – Spectres prémultipliés dans les direction  $x$  et  $z$  de la composante  $u$  de la vitesse

## 4.2 Étude comparative des statistiques de l'écoulement

### 4.2.1 Grille moyenne

On s'intéresse ici à l'intensité des fluctuations des quantités d'intérêt de l'écoulement estimée à partir de la moyenne quadratique des fluctuations. La moyenne quadratique d'une quantité  $q$  est définie par :

$$\overline{q'} = \sqrt{\overline{q'q'}} \quad (4.3)$$

La figure 4.8 présente la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse et de pression  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  et  $p'$  obtenues sur la grille moyenne en fonction de la distance  $y^+$  aux parois pour les différentes configurations du code DNS. La moyenne quadratique des fluctuations de vorticité est présentée dans la figure 4.9. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par l'approche spectrale utilisée par Moser et al. [36]. On remarque que la configuration EXPOPT et la configuration compacte fournissent des résultats similaires et en très bon accord avec ceux obtenus selon l'approche spectrale. Cette observation n'est pas surprenante au regard de la précision quasi-spectrale des schémas utilisés par ces configurations. Les profils de fluctuations de vitesse obtenus avec la configuration O2 diff rent légèrement pour les composantes  $v$  et  $w$  tandis que l'on constate un écart significatif pour les intensités turbulentes de la pression ainsi que de la composante  $y$  de la vorticité.

Ces écarts entre la configuration O2 et les configurations compactes et EXPOPT peuvent être interprétés à travers l'étude des densités spectrales de l'intensité turbulente. L'application du théorème de Parseval permet d'estimer la contribution  $C_i^{(x_j)}$  d'une portion du spectre (délimitée par  $k_{max}$ )   l'intensité turbulente totale de la composante  $i$  de la vitesse :

$$C_i^{(x_j)} = \sum_{k \in [0, \dots, k_{max}]} \frac{\left| \widehat{u}_i^{(x_j)}(k) \widehat{u}_i^{*(x_j)}(k) \right|}{\overline{u_i'^2}} \quad (4.4)$$

où  $\widehat{u}_i^{(x_j)}$  est la transformée de Fourier discrète dans la direction  $x_j$  considérée de la composante  $i$  de la vitesse. Le tableau 4.1 dresse la proportion de l'énergie turbulente comprise dans la zone de bonne précision des schémas pour les configurations O2 et EXPOPT et pour les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  de la vitesse à  $y^+ = 15$ . La plage retenue pour le calcul des contributions s'étend jusqu'en  $k_x = 20$  et  $k_z = 60$  (correspondant à  $kh = 2$ ) pour les configurations compacte et EXPOPT et jusqu'en  $k_x = 6$  et  $k_z = 20$

pour la configuration O2. Les contributions obtenues sont parfaitement cohérentes avec les profils d'intensité turbulente de la figure 4.8 : on remarque tout d'abord que les configurations compacte et explicite optimisée permettent une couverture quasiment complète du spectre l'énergie turbulente quelles que soient la direction et la composante considérées et sont donc équivalentes à l'approche spectrale sur la grille utilisée. En revanche, la contribution O2 présente une couverture limitée, particulièrement pour la composante  $v$ , où près de 40% de l'énergie turbulente est portée par des modes situés en dehors de la zone de bonne précision des schémas. Ceci est conforme avec l'écart observé entre les configurations O2 et EXPOPT pour la vitesse  $v$  dans la figure 4.8.

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
O2 - Direction $x$	95.3	78.6	84.3
O2 - Direction $z$	91.3	63.1	93.3
EXPOPT - Direction $x$	99.9	98.8	99.6
EXPOPT - Direction $z$	99.9	99.5	99.97

TABLE 4.1 – Proportion de l'énergie turbulente couverte par la résolution spectrale des schémas O2 et explicites optimisés dans les directions  $x$  et  $z$  (exprimée en pourcentage)

#### 4.2.2 Grille grossière

Dans cette section, on se propose de comparer les statistiques obtenues sur la grille grossière avec les résultats obtenus sur la grille moyenne afin d'évaluer l'effet de la dégradation du maillage pour les différentes configurations. La figure 4.10, analogue à la figure 4.8 sur la grille G1, montre les profils d'intensité des fluctuations de vitesse et de pression. Comme indiqué précédemment, un filtrage a été appliqué dans les configurations compacte et explicite optimisée afin de réduire les effets d'aliasing dus à la faible résolution de la grille. Les résultats obtenus pour la configuration EXPOPT sans filtrage sont également montrés à titre de comparaison (cas EXPOPT-AL).

L'accord des courbes obtenues avec le cas filtré avec les résultats issus de la grille moyenne est légèrement meilleur que pour le cas non filtré, particulièrement pour la composante longitudinale de la vitesse. Sur l'ensemble des statistiques, l'effet du filtrage est plus limité mais tend à rapprocher les résultats obtenus sur la grille grossière des résultats obtenus sur la grille moyenne.

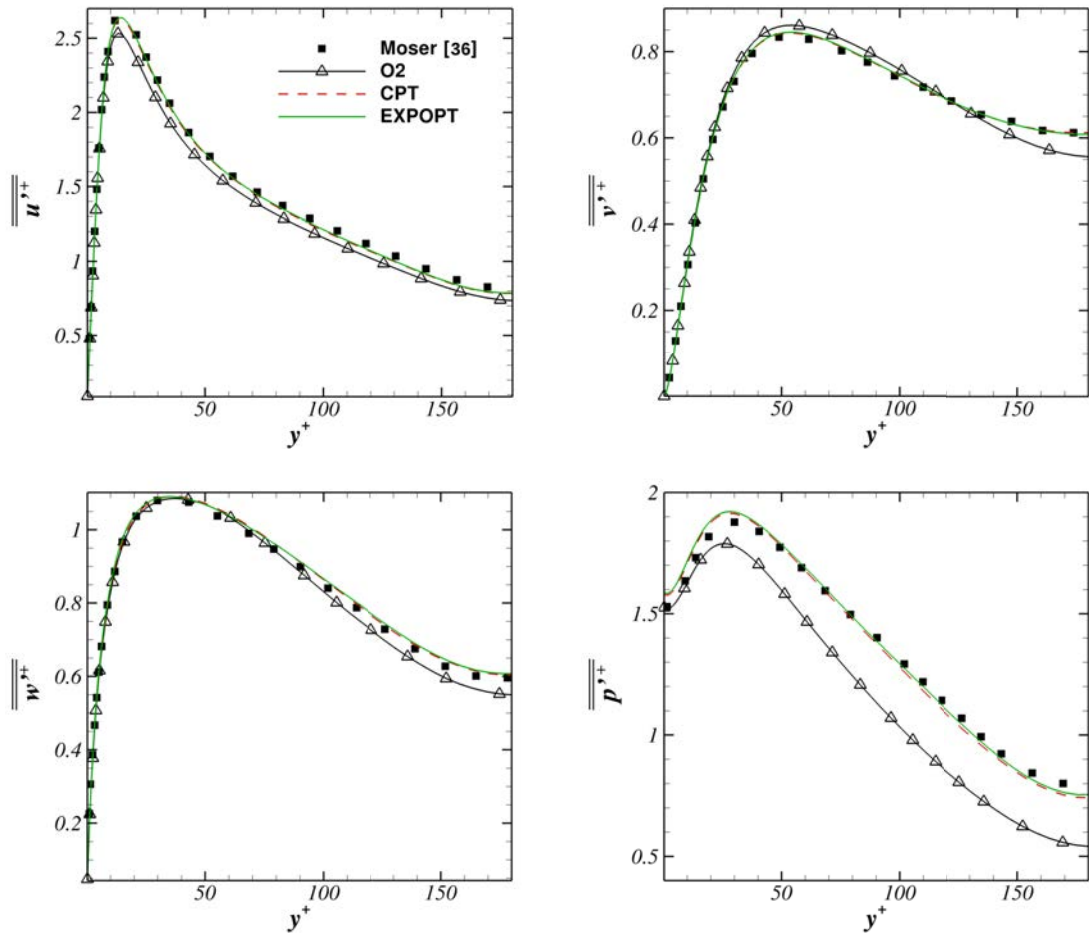


FIGURE 4.8 – Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse et de pression sur la grille moyenne  $129 \times 129 \times 129$  pour les configurations O2, EXPOPT et CPT comparées avec les résultats de [36]

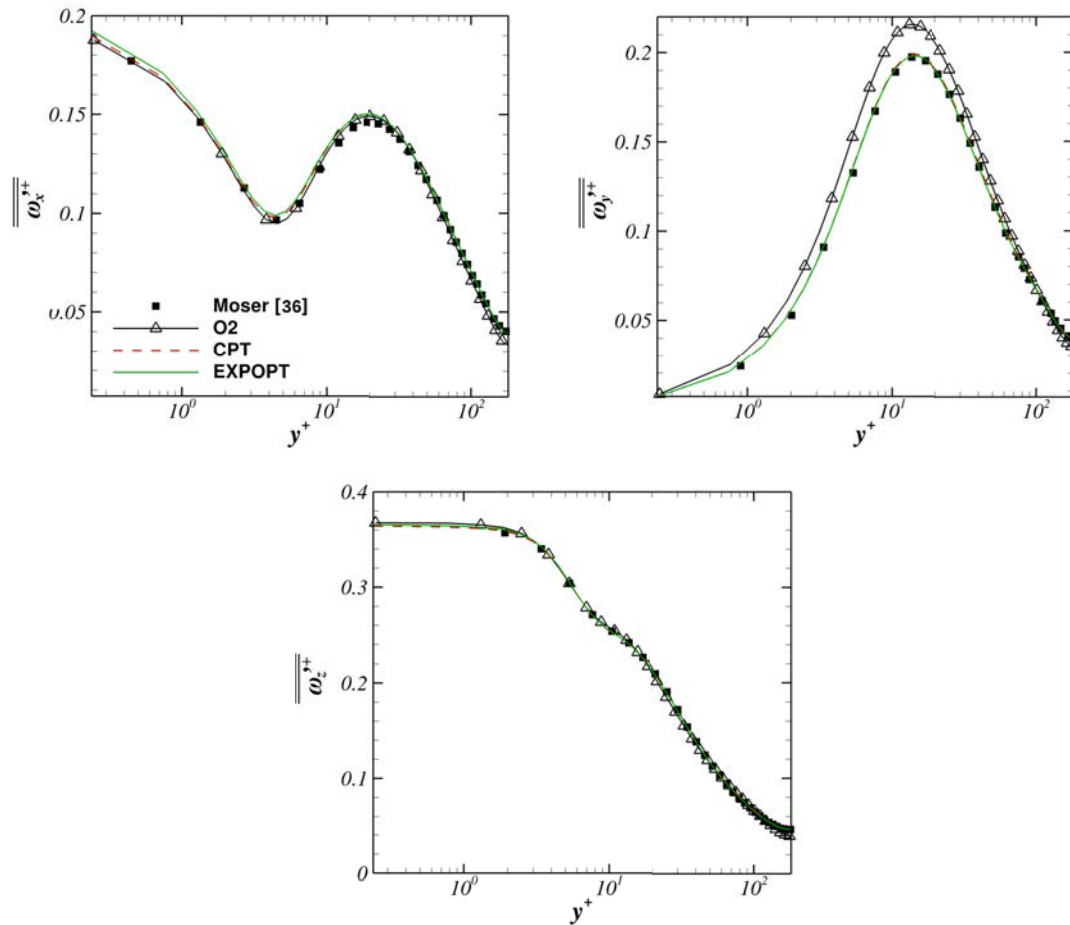


FIGURE 4.9 – Moyenne quadratique des fluctuations de vorticité sur la grille moyenne  $129 \times 129 \times 129$  pour les configurations O2, EXPOPT et CPT comparées avec les résultats de [36]

Il est intéressant de constater que malgré une résolution divisée par deux dans les directions  $y$  et  $z$ , les résultats obtenus par les configurations EXOPT et compacte sont en bon accord avec ceux obtenus sur la grille G1. Dans la direction  $y$ , la taille des mailles au centre du canal est de  $\Delta y^+ = 11$  et n'est pas sensiblement supérieure aux tailles généralement utilisées dans la littérature ( $\Delta y^+ = 8$  dans l'étude de Hoyas et al. [38]). La direction  $y$  est par ailleurs relativement bien résolue à proximité des parois où la taille des mailles est de  $\Delta y^+ = 1$  et est inférieure à l'échelle de Kolmogorov (tailles des plus petites structures). Enfin dans la direction  $z$ , les schémas explicites optimisés fournissent une excellente précision jusqu'en  $kh = 2$ . Ce  $kh$  correspond approximativement à  $k = 30$ . Une application du théorème de Parseval montre que cette zone de bonne résolution spectrale ( $k < 30$ ) concentre près de 97%, 89% et 99% de l'énergie cinétique des composantes  $u, v$  et  $w$  de la vitesse. Les bons résultats obtenus avec les configurations compacte et EXOPT s'expliquent donc d'une part par l'utilisation d'une résolution raisonnable dans la direction  $y$  et d'autre part, par les résolutions spectrales élevées des schémas utilisés.

A l'opposé, les modes situés au-delà de la zone couverte par la résolution spectrale des schémas d'ordre O2 ( $kh > 0.6$ ) représentent près de 80% de l'intensité turbulente de la composante  $v$  et près de 40% des intensités des composantes  $u$  et  $w$ . Le « décrochage » de la configuration O2 trouve donc une explication évidente dans la résolution spectrale réduite des schémas d'ordre 2 qui exclut une partie significative de l'intensité fluctuante.

## 5 Performance du code

### 5.1 Description de la machine de calcul TURING

Les performances du code ont été étudiées sur la machine de calcul TURING mise à notre disposition par l'IDRIS, sur laquelle ont été effectuées les simulations qui seront présentées par la suite. Cette machine massivement parallèle est composée de 6 144 nœuds de calcul de 16 Go de RAM et comportant chacun 16 cœurs IBM (PowerPC-A2) pour un total de 98 304 cœurs sur l'ensemble de la configuration.

Afin de réduire au maximum la consommation d'énergie, les concepteurs de la machine ont fait le choix d'un nombre élevé de cœurs à faible performance, la fréquence réduite des processeurs (1.6 GHz) permettant de réduire significativement les effets de chauffe et l'énergie nécessaire pour refroidir le système. Par ailleurs, afin

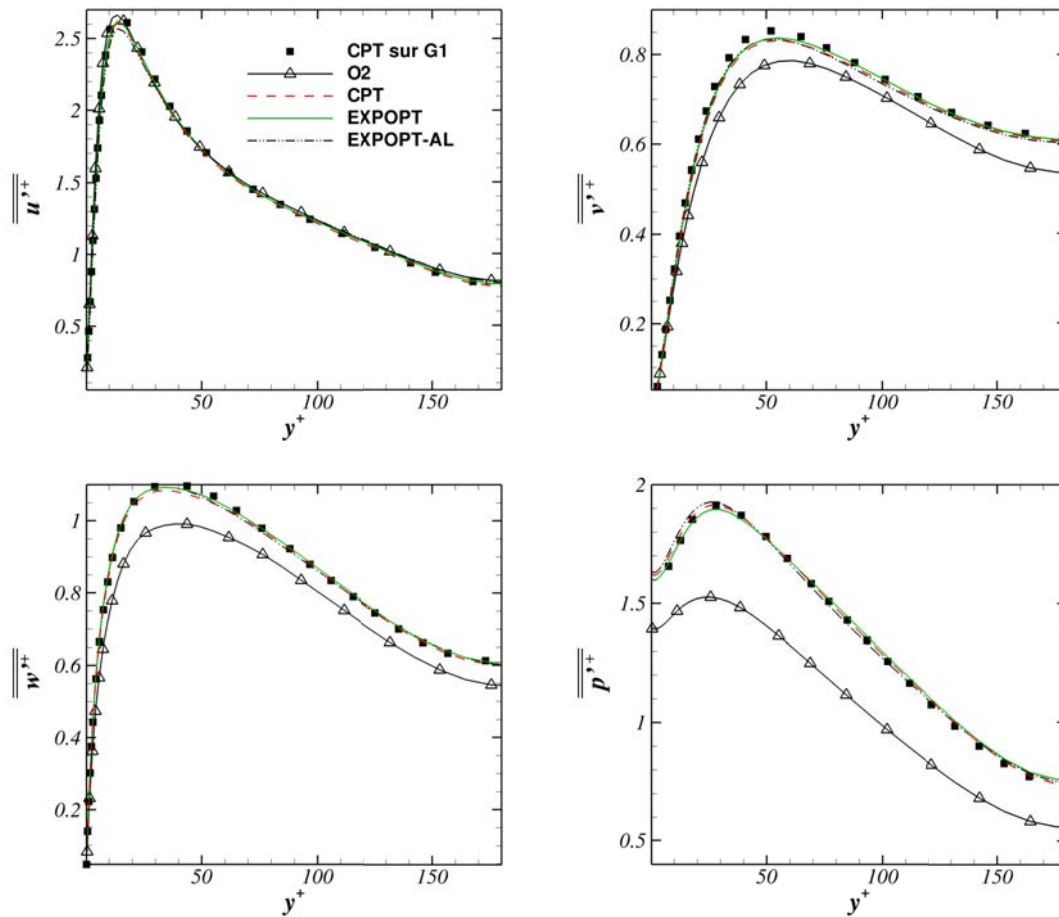


FIGURE 4.10 – Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse et de pression sur la grille grossière  $129 \times 65 \times 65$  pour les configurations O2, EXPOPT, EXPOPT-AL et CPT comparées avec les résultats obtenus par la configuration CPT sur la grille G1

de réduire au maximum le temps de latence dû aux communications entre processus, les nœuds de calcul sont reliés par un réseau très rapide permettant un débit d'environ 20 Go/s entre les nœuds de calcul. Ce type d'architecture permet d'atteindre une puissance de calcul totale très élevée et est donc idéal pour les codes ayant de fortes capacités parallèles pouvant tirer parti de la puissance cumulée de la machine. A l'inverse, les codes basés sur un parallélisme à mémoire partagée devront être exécutés sur des architectures offrant des cœurs très performants afin de pouvoir disposer d'une puissance suffisante au sein d'un nœud de calcul (machine Ada de l'IDRIS par exemple).

En raison du coût numérique des DNS aux nombre de Reynolds visés, le code a été parallélisé selon une approche à mémoire distribuée de façon à pouvoir être exécuté sur un nombre élevé de processeurs et est donc parfaitement adaptée à la machine TURING.

## 5.2 Performances parallèles

Le code DNS a été parallélisé selon l'approche de décomposition 2D décrite dans le premier chapitre, choisie pour sa simplicité et ses très bonnes propriétés parallèles. Les transpositions d'une configuration à une autre (voir figure 1.2 du chapitre 1) sont gérées par la librairie 2Decomp&FFT développée par Ning Li [39]. Afin d'éviter les opérations de transposition inutiles, les traitements ont été regroupés selon leurs directions de façon à pouvoir effectuer un maximum d'opérations en une seule fois dans une configuration donnée avant de changer de configuration. On notera que les tests présentés dans cette section ont été réalisés avec la dernière version du code DNS basée sur une résolution purement spectrale de l'équation de Poisson (voir la section 2 du chapitre 5).

Le temps d'exécution du code sur 1000 itérations a été mesuré sur une grille comportant  $2048 \times 512 \times 512$  points, de taille comparable aux grilles qui seront utilisées par la suite, en faisant varier le nombre de processus jusqu'à 16384. Le code DNS a été compilé avec l'option -O3 du compilateur mpixlf90. Le tableau 4.2 donne les temps mesurés ainsi que l'accélération et l'efficacité correspondante pour les différents nombres de processus testés ( $N_{procs} = 1024, 2048, 4096, 8192$  et 16384).

La figure 4.11 montre les courbes d'accélération et d'efficacité. Le code DNS présente une bonne extensibilité pour le nombre de processus testés. L'extensibilité maximale du code semble toutefois atteinte pour  $N_{procs}=16384$  où l'on observe un infléchissement de la courbe d'accélération. Cette baisse des performances parallèles vers  $N_{procs}=16384$  pourrait s'expliquer par le temps de latence nécessaire à l'étab-



$N_{procs}$	Temps par itération (s)	Accélération	Efficacité
1024	2.789		
2048	1.389	2.008	1.004
4096	0.706	3.950	0.988
8192	0.380	7.339	0.917
16384	0.242	11.525	0.720

TABLE 4.2 – Performances parallèles du code sur un maillage de  $2048 \times 512 \times 512$  points

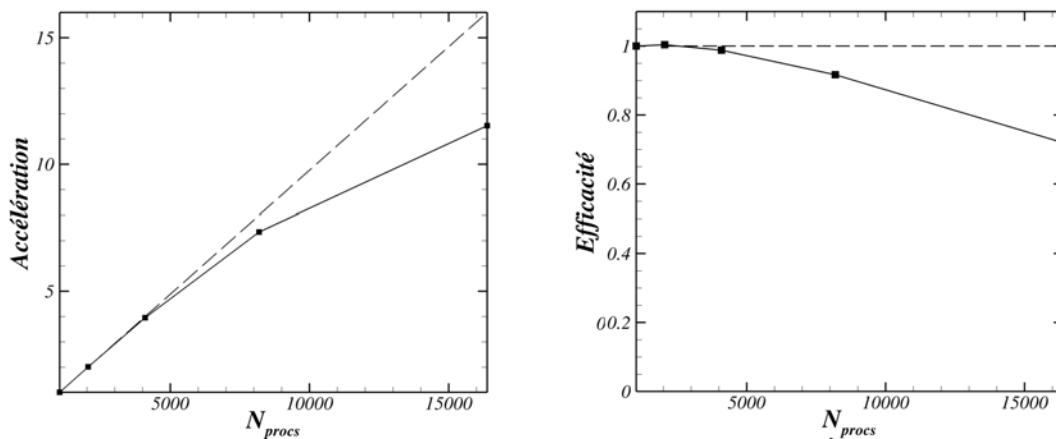


FIGURE 4.11 – Accélération (à gauche) et efficacité (à droite) du code mesurées sur TURING. Les tracés en pointillés correspondent au cas théorique

lisement des communications entre les processus. Le temps d’envoi (ou de réception) d’un paquet est en effet partagé entre le temps de latence incompressible correspondant à l’initialisation des communications et le temps de transfert du paquet une fois la communication établie, proportionnel à la taille des paquets. Dans le cas d’une décomposition 2D, la taille des paquets est inversement proportionnelle au nombre de processus et l’accélération apportée par la parallélisation est optimale lorsque le temps de latence est négligeable devant le temps de transfert. Dans notre cas, la taille des paquets échangés à  $N_{procs}=16384$  est relativement réduite (2048 octets) et le temps de latence pourrait représenter une portion significative du temps de communication, qui serait alors faiblement accéléré par l’augmentation du nombre de processus.

### 5.3 Profilage du code

L’environnement logiciel sur TURING propose des outils de profilage permettant d’évaluer les différents coûts numériques afin de s’assurer de la bonne optimisation

des différentes parties du code. Les résultats présentés ici ont été obtenus avec le logiciel Scalasca [40] qui rajoute des procédures de mesure avant et après chaque appel de fonction dans le code de façon à déterminer le temps passé dans chacune d’elles. Cet ajout est effectué durant la phase de compilation du code.

Un profilage du code a été réalisé dans le cas d’une simulation de 1000 itérations sur une grille de  $2048 \times 512 \times 512$  points sur 2048 processeurs. Les coûts des communications sont une donnée particulièrement importante dans le cas d’un parallélisme à mémoire distribuée, et plus particulièrement dans notre cas où l’utilisation d’une décomposition 2D peut induire des coûts relativement importants. Par ailleurs, si la précision des schémas explicite optimisé et compact a été grandement discutée et validée dans les parties précédentes, la question du coût numérique de ces configurations n’a jusqu’alors pas été abordée. Le tableau 4.3 montre le temps passé dans les communications par itération ainsi que celui passé dans les schémas de calcul pour les configurations compact et explicite optimisé. Les coûts des schémas ont été obtenus en faisant la somme des coûts indiqués pour les différents schémas D0s, D1s, D1c et D2c utilisés.

	Temps/it. (s)	Communications	Schémas	Poisson
EXPOPT	1.389	0.620 (44.6%)	0.266 (19.1%)	0.571 (41.1%)
CPT	2.153	0.645 (30.0%)	1.064 (49.4%)	0.574 (26.7%)

TABLE 4.3 – Temps passé dans les communications, les schémas de calcul et la résolution de l’équation de Poisson pour les configurations explicite optimisée (EXPOPT) et compacte (CPT) pour une exécution parallèle sur 2048 processeurs sur le maillage  $2048 \times 512 \times 512$

Les temps de communication représentent une fraction significative d’environ 30 à 40% du temps de calcul, imputable aux opérations de transposition (environ 50) des tableaux 3D effectuées dans le cadre de l’approche de décomposition 2D. Ce surcoût relativement important, inhérent à l’approche de décomposition 2D, a déjà été discuté dans le premier chapitre et reste tout à fait acceptable au regard de la simplicité de cette approche et des économies réalisées en temps de développement par rapport à l’approche de décomposition 3D. Il est à noter qu’une fraction importante du temps de calcul est dépensée en dehors des schémas et des communications, principalement dans la résolution de l’équation de Poisson qui représente près de 40% du coût numérique dans le cas de la configuration EXPOPT.

Le temps passé dans les schémas est près 4 fois moindre pour la configuration EXPOPT que pour la configuration compacte de précision analogue. La configuration explicite optimisée sera donc utilisée pour l’ensemble des simulations à venir.

Il est important de souligner que ces résultats, qui justifient le choix de la configuration explicite optimisée sur la machine TURING, ne permettent pas de tirer des conclusions plus générales sur les performances relatives des schémas compacts et explicites optimisés qui dépendent fortement de l'architecture d'exécution et de l'implémentation des schémas. Notamment, et malgré le soin apporté à l'implémentation des schémas dans notre code, il est difficile de garantir une implémentation parfaitement optimisée, particulièrement pour les schémas compacts dont la résolution est relativement complexe au regard des schémas explicites optimisés.

## 6 Conclusions

L'utilisation de schémas à haute précision, compacts ou explicites optimisés, permet d'atteindre une précision équivalente à celle des codes DNS basés sur une résolution spectrale des équations de Navier-Stokes. Les statistiques de vitesse et de pression obtenues par les configurations compacte et EXPOPT sont en effet très proches des résultats obtenus par Moser et al. [36] selon une approche spectrale sur un maillage équivalent, à la différence des résultats de la configuration O2 qui diffèrent sensiblement du cas spectral. La différence entre les configurations à haute précision et la configuration O2 est accentuée par l'utilisation d'une grille grossière : les résultats de la configuration O2 sont alors fortement dégradés tandis que les résultats des configurations EXPOPT et compacts restent relativement proches de ceux obtenus sur la grille classique. Ces résultats confirment donc la capacité des schémas explicites optimisés ou compacts à atteindre une excellente précision sur des grilles classiques tout en conservant une précision convenable sur des grilles plus grossières. L'étude des solutions de réduction de l'aliasing réalisée dans la section 4.1 a montré que le filtrage de la solution numérique toutes les 100 itérations permettait de réduire efficacement l'aliasing tandis que l'effet produit par l'utilisation de schémas de dérivée seconde sur-dissipatifs est relativement marginal. C'est donc cette méthode qui sera utilisée par la suite.

L'étude des performances du code montre que les schémas explicites optimisés sont près de quatre fois plus rapides que les schémas compacts et seront donc utilisés par la suite. Enfin, le code DNS a été exécuté sur le supercalculateur TURING afin d'étudier ses performances parallèles. Les courbes d'accélération et d'efficacité obtenues sont proches du cas théorique et indiquent une bonne extensibilité du code (de l'ordre de 16000 processus) pour le maillage testé. Ces résultats valident

la qualité de la parallélisation et autorisent l'utilisation du code pour la simulation d'écoulements à grands nombres de Reynolds nécessitant un nombre élevé de processus.



# Chapitre 5

## Généralisation du code numérique

### 1 Introduction

Dans le cas d'écoulements incompressibles, la résolution de l'équation de Poisson constitue une étape clé dans la stratégie numérique globale et concentre l'essentiel des difficultés. L'approche spectrale, consistant à résoudre l'équation de Poisson dans l'espace de Fourier, généralement utilisée en raison de son coût numérique réduit, est de prime abord difficilement applicable aux directions non périodiques de l'écoulement ainsi que lorsque la grille utilisée n'est pas uniforme.

Dans le code DNS initial, la résolution de l'équation de Poisson 3.16 s'effectue selon une approche « hybride » consistant à travailler dans l'espace de Fourier pour les directions périodiques et uniformes  $x$  et  $z$  et à travailler dans l'espace physique pour la direction normale aux parois  $y$ . Dans le cas de l'utilisation du schéma de dérivation standard d'ordre 2, le coût numérique induit par ce passage dans l'espace physique est relativement modeste au regard de la liberté apportée dans le choix du maillage et des conditions aux limites. En revanche, les schémas de précision plus élevée impliquent un plus grand nombre de points voisins (tels que les schémas explicites optimisés ou compacts vus précédemment) et rendent la résolution du système 3.17 beaucoup plus coûteuse en raison de la taille de la matrice  $\mathcal{M}$  à inverser. En outre, une résolution dans l'espace physique sur plus d'une direction comporte un coût relativement élevé et est donc difficilement envisageable. L'approche « hybride » introduite pour contourner les limitations des résolutions spectrales est finalement assez limitée et peu adaptée à la simulation de configurations d'écoulements variées ou à l'utilisation de schémas de calcul explicites optimisés ou compacts.

L'approche spectrale pure, proposée par Laizet et al. [30], consiste à utiliser une

transformation de maillage adaptée à une résolution spectrale, c'est-à-dire pouvant être décomposée en un petit nombre de modes de Fourier. L'étude de Laizet et al. [30] propose par ailleurs de modéliser les conditions aux limites non-périodiques (conditions d'adhérence ou de surface libre par exemple) par des conditions symétriques ou antisymétriques pouvant être compatibles avec une décomposition en série de Fourier. Cette approche a permis d'étendre considérablement la portée du code DNS.

Ce chapitre présente les extensions apportées au code DNS ainsi que les résultats obtenus. Dans un premier temps, l'approche spectrale pure sera présentée et appliquée au cas de conditions aux limites génériques et d'une direction irrégulière. Les différentes sections du chapitre seront ensuite consacrées aux détails de l'implémentation des nouvelles fonctionnalités du code. Les résultats obtenus seront également présentés et validés par comparaison avec les travaux déjà publiés dans la littérature.

## 2 Implémentation d'une approche spectrale générique pour la résolution de l'équation de Poisson

Cette section présente une vue d'ensemble des stratégies développées par Laizet et al. [30] et mises en œuvre dans le code DNS. L'approche présentée ici peut être appliquée à des configurations d'écoulement relativement complexes, généralement hors de portée des approches spectrales classiques.

### 2.1 Approche spectrale classique

L'approche spectrale généralement utilisée dans les codes DNS est limitée aux directions périodiques et uniformes. Cette approche consiste à décomposer le membre droit de l'équation 3.16 ( $D = \frac{\mathcal{D}}{b\gamma_k \Delta t}$ ) dans l'espace de Fourier :

$$D(x, y, z) = \sum_{l=N_x/2-1}^{N_x/2} \sum_{m=N_y/2-1}^{N_y/2} \sum_{n=N_z/2-1}^{N_z/2} \hat{D}(k_l, k_m, k_n) \quad (5.1)$$

avec  $k_l = 2\pi l/L_x$ . L'équation 3.16 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_l \sum_m \sum_n \hat{p}^{k+1}(k_l, k_m, k_n) \left( \frac{\delta^2 e^{\iota k_l x}}{\delta x^2} e^{\iota k_m y} e^{\iota k_n z} + e^{\iota k_l x} \frac{\delta^2 e^{\iota k_m y}}{\delta y^2} e^{\iota k_n z} + e^{\iota k_l x} e^{\iota k_m y} \frac{\delta^2 e^{\iota k_n z}}{\delta z^2} \right) \\ = \sum_l \sum_m \sum_n \hat{D}(k_l, k_m, k_n) \end{aligned} \quad (5.2)$$

On peut alors exprimer les dérivées numériques à partir du nombre d'onde modifié du schéma de calcul. Le poids de chaque mode dans la solution physique est alors donné par :

$$\hat{p}^{k+1}(k_l, k_m, k_n) = \frac{\hat{D}(k_l, k_m, k_n)}{\left( k_l^{(1)} k_l^{(1)} + k_m^{(1)} k_m^{(1)} + k_n^{(1)} k_n^{(1)} \right)} \quad (5.3)$$

La solution de l'équation s'obtient finalement en effectuant la transformée de Fourier inverse. La résolution de l'équation dans l'espace de Fourier est immédiate contrairement à une résolution dans l'espace physique qui nécessite la résolution d'un système linéaire dont la taille dépend du schéma utilisé. On notera par ailleurs que l'utilisation du nombre d'onde modifié rend cette approche complètement indépendante du schéma de calcul utilisé. Le coût numérique de l'approche spectrale est donc essentiellement dû à la décomposition dans l'espace de Fourier et est en  $N_x N_y N_z \log(N_x N_y N_z)$ . À titre de comparaison, le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de l'équation de Poisson dans l'espace physique selon la méthode LU est de l'ordre de  $(N_x N_y N_z)^2$  [41].

## 2.2 Approche spectrale étendue aux directions non-homogènes

L'utilisation de conditions aux limites adéquates pour les champs de pression et de vitesse permet d'étendre l'approche spectrale aux écoulements comportant des directions inhomogènes (pour lesquelles l'utilisation de conditions aux limites périodiques est proscrite). Dans cette section, on considère un écoulement en canal bidimensionnel. La présence des parois est modélisée par une condition d'adhérence dans la direction  $y$  tandis que, dans la direction  $x$ , l'écoulement en sortie est réinjecté en entrée (conditions périodiques).

L'approche spectrale utilisée par Laizet et al. [30] est basée sur l'hypothèse d'un gradient de pression locale ( $p'$ ) nul aux limites des directions non homogènes du



domaine. Dans notre cas :

$$\frac{\partial p'}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial p'}{\partial y}(x, L_y) = 0 \quad (5.4)$$

La résolution spectrale interdit l'utilisation de schémas différents à proximité des limites du domaine. Les valeurs du champ de pression au-delà du domaine sont approximées par une condition de symétrie compatible avec l'équation 5.4 :

$$\begin{aligned} p'(-j\frac{\Delta y}{2}) &= p'(j\frac{\Delta y}{2}) + \mathcal{O}(\Delta y^3) \\ p'(L_y - j\frac{\Delta y}{2}) &= p'(L_y + j\frac{\Delta y}{2}) + \mathcal{O}(\Delta y^3) \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $j = 2n + 1$ , la pression étant située au centre des mailles. La précision formelle en  $\mathcal{O}(\Delta y^3)$  de l'approximation ainsi effectuée s'obtient facilement en exprimant la pression  $p'$  de part et d'autre de la limite (par exemple,  $p'(L_y - j\frac{\Delta y}{2})$  et  $p'(L_y + j\frac{\Delta y}{2})$  pour la limite supérieure) selon un développement de Taylor.

On notera que la résolution de l'équation de Poisson n'impose aucune contrainte sur le choix des conditions aux limites de  $u$  dans la direction  $y$  et de  $v$  dans la direction  $x$ , ces dernières n'intervenant pas dans le calcul de la divergence du champ de vitesse intermédiaire  $\mathcal{D}\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$ . Dans le cas considéré ici, la direction  $x$  est homogène et la vitesse  $u$  au-delà des limites du domaine est donnée par une condition aux limites périodique. Dans la direction  $y$ , la vitesse normale au-delà des parois est déterminée par un développement de Taylor d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(-j\Delta y) &= 2\tilde{v}(0) - \tilde{v}(j\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \\ v^{n+1}(-j\Delta y) &= 2v^{n+1}(0) - v^{n+1}(j\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Les conditions 5.5 pour la pression et 5.6 pour le champ de vitesse conduisent naturellement à des conditions symétriques en  $y = 0$  et  $y = L_y$  pour le laplacien de la pression et la divergence du champ de vitesse intervenant dans l'équation de Poisson 3.16, ce qui permet de prolonger les champs au-delà de  $y = L_y$  jusqu'en  $y = 2L_y$  en dupliquant les valeurs des champs en  $L_y - a$  en  $L_y + a$  (où  $0 < a < L_y$ ). L'équation de Poisson est finalement résolue selon l'approche périodique classique sur le domaine de calcul  $[N_x, 2N_y - 1]$ .

### 2.3 Extension à une direction non uniforme

Dans le cas où le maillage comporte une direction irrégulière ( $y$  par exemple), le nombre d'onde modifié correspondant  $k_y$  comporte une dépendance avec la position  $y$  dans l'espace physique du fait de la taille variable de mailles dans cette direction. Cette difficulté peut être contournée en travaillant dans le système de coordonnées régulières  $(x, s, z)$  associé à l'espace physique  $(x, y, z)$ . La dérivée selon  $y$  peut être exprimée dans le maillage uniforme selon la relation :

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta s}{\delta y} \frac{\delta f}{\delta s} = \frac{1}{h'} \frac{\delta f}{\delta s}(s) \quad (5.7)$$

Dans l'espace de Fourier associé au domaine régulier, la fonction  $f$  et sa dérivée  $g$  selon  $y$  se décomposent en :

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{m=N_y/2-1}^{N_y/2} \widehat{f}_m \exp(\iota k_m s) \\ g(s) &= \frac{\delta f}{\delta y} = \sum_{m=N_y/2-1}^{N_y/2} \widehat{g}_m \exp(\iota k_m s) \end{aligned} \quad (5.8)$$

La dérivée selon la direction uniforme  $s$  peut s'exprimer à partir du nombre d'onde modifié :

$$\frac{\delta f}{\delta s} = \sum_{m=N_y/2-1}^{N_y/2} \left. \frac{\delta \widehat{f}}{\delta s} \right|_m \exp(\iota k_m s) = \sum_{m=N_y/2-1}^{N_y/2} \iota k_m^{(1)} \widehat{f}_m \exp(\iota k_m s) \quad (5.9)$$

La fonction  $1/h'$  exprimant la métrique du domaine peut être décomposée en :

$$\frac{1}{h'} = \sum_{p=-M}^M a_p \exp(\iota k_p s) \quad (5.10)$$

où  $M$  définit le nombre de modes composant  $1/h'$ . La dérivée selon  $y$  dans l'espace de Fourier peut alors être exprimée par un produit de convolution faisant intervenir les coefficients  $a_p$  connus (et qui dépendent de la transformation du maillage) et les coefficients  $\widehat{f}_m$  à déterminer :

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}_m &= \left. \frac{\delta f}{\delta y} \right|_m = \sum_{p=-M}^M a_p \left. \frac{\delta f}{\delta s} \right|_{m-p} \\
 &= \sum_{p=-M}^M \iota a_p k_{m-p}^{(1)} \widehat{f}_{m-p}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

La transformée de Fourier de la dérivée seconde  $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$  s'exprime de manière analogue par :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \right|_m &= \left. \frac{\delta g}{\delta y} \right|_m = \sum_{p=-M}^M a_p \left. \frac{\delta g}{\delta s} \right|_{m-p} \\
 &= \sum_{p=-M}^M \iota a_p k_{m-p}^{(1)} \widehat{g}_{m-p}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Soit, en développant  $\widehat{g}_{m-p}$  selon la relation 5.11 :

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \right|_m = \sum_{p=-M}^M \iota a_p k_{m-p}^{(1)} \left( \sum_{p'=-M}^M a_{p'} \left. \frac{\delta f}{\delta s} \right|_{m-p-p'} \right) \tag{5.13}$$

On obtient finalement :

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \right|_m = \sum_{p=-M}^M \sum_{p'=-M}^M -a_p a_{p'} k_{m-p}^{(1)} k_{m-p-p'}^{(1)} \widehat{f}_{m-p-p'} \tag{5.14}$$

L'équation de Poisson à résoudre est donc :

$$\begin{aligned}
 &\left( -k_l^{(1)} k_l^{(1)} - k_n^{(1)} k_n^{(1)} - \sum_{p=-M}^M \sum_{p'=-M}^M a_p a_{p'} k_{m-p}^{(1)} k_{m-p-p'}^{(1)} \widehat{f}_{m-p-p'} \right) \widehat{p}^{k+1}(k_l, k_m, k_n) \\
 &= \widehat{D}(k_l, k_m, k_n)
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

La résolution d'un tel système ne peut naturellement être envisagée que si la transformation du maillage comporte un nombre suffisamment réduit de modes afin de garder un système de taille réduite peu coûteux à inverser. La transformation proposée par Laizet et al. [30] définie dans la section 2.2.2 du chapitre 3 se compose

de trois modes ( $M = 1$ ) définis par :

$$a_0 = \frac{1}{L_y} \left( \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi\beta} \right), \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4\pi\beta L_y} \quad (5.16)$$

### 3 Transport d'un scalaire passif

Le transport d'un scalaire passif est un cas particulier du transport d'une quantité où la quantité transportée n'influe pas sur la dynamique de l'écoulement. La quantité scalaire est alors qualifiée de passive par opposition au cas plus général où celle-ci influe sur la dynamique de l'écoulement (scalaire actif). Le transport d'un scalaire passif a été intégré au code DNS dans une démarche plus globale ayant pour but de permettre la simulation du transport de plusieurs quantités actives. Cette démarche nécessite de traiter le couplage entre les quantités actives transportées et les équations de Navier-Stokes et est, à l'heure actuelle, encore en phase de validation. Ce chapitre se limitera donc au cas passif qui sera validé à travers le transport de la température dans le cas d'un écoulement de convection forcée.

#### 3.1 Équation de la température et adimensionnalisations

L'équation de la conservation de l'énergie thermique dans un fluide à conductivité thermique constante peut s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_i T}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad (5.17)$$

où  $\alpha$  est la diffusivité thermique. Dans le code DNS, les quantités sont adimensionnalisées par rapport aux échelles externes ( $h, U_{cp}$ ). La température est adimensionnalisée par le différentiel de température  $\Delta T = T_{sup} - T_{inf}$  entre les parois :

$$T^* = \frac{T - T_c}{\Delta T} \quad (5.18)$$

où  $T_c = (T_{sup} + T_{inf})/2$  et  $T_{inf}$  et  $T_{sup}$  la température des parois inférieures et supérieures. L'équation de la température ainsi adimensionnée s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_i T}{\partial x_i} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad (5.19)$$

où  $Pr$  est le nombre de Prandtl défini par  $Pr = \nu/\alpha$ .

### 3.2 Résultats de simulations

L'implémentation du scalaire passif a été appliquée au problème de la convection forcée dans le cas de l'écoulement faiblement turbulent ( $Re_\tau = 150$ ) déjà étudié par Lyons et al. [42]. Les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de transport 5.19 sont discrétisées selon la configuration explicite optimisée du code DNS et avancées en temps selon la méthode de Runge-Kutta avec le pas de temps  $\Delta t = 0.012$ . Les caractéristiques de la grille ainsi que les paramètres physiques de la simulation sont analogues à [42] : le domaine est discrétisé sur une grille comportant  $129 \times 65 \times 129$  dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  et la taille du domaine est donnée par  $L_x = 4\pi h$ ,  $L_y = 2h$  et  $L_z = 2\pi h$ . Dans la direction  $y$ , la transformation 3.5 est utilisée et la taille des mailles varie de  $\Delta y^+ = 1$  à  $\Delta y^+ = 11$ . Il est important de préciser que le maillage utilisé par Lyons et al. [42] comporte le même nombre de points mais utilise un raffinement plus agressif à proximité des parois du fait de l'utilisation d'une méthode de Tchebychev dans cette direction : la taille des mailles, très petite aux parois, varie donc beaucoup plus fortement selon  $y$ .

La figure 5.1 présente le profil de température moyenne exprimé dans les échelles internes (+) caractéristiques de la dynamique de l'écoulement à proximité des parois. La température exprimée dans les échelles internes est donnée par :

$$T^+ = \frac{T}{T_\tau} \quad (5.20)$$

où l'échelle de température  $T_\tau = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} / (Re_\tau Pr)$  est appelée température de frottement par analogie avec la vitesse de frottement utilisée comme échelle de vitesse interne. Le profil de température obtenu est en très bon accord avec le profil tiré de Lyons.

La figure 5.2 montre la moyenne quadratique des fluctuations de température. On notera la très bonne symétrie de part et d'autre du canal qui tend à confirmer la bonne convergence des statistiques. L'accord avec les résultats de Lyons reste satisfaisant mais n'est pas parfait : l'écart entre les deux profils est de 3% au niveau du premier pic (en  $y^+ = 20$ ).

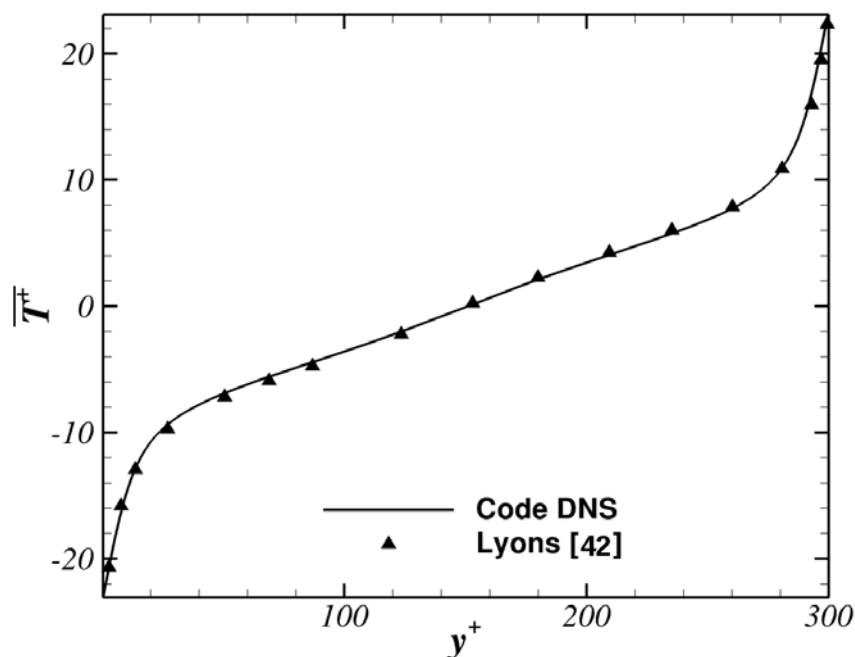


FIGURE 5.1 – Profil de température moyenne exprimé dans les échelles internes

## 4 Écoulement autour d'un corps immergé

### 4.1 Conditions aux limites en entrée et en sortie du domaine

La plupart des simulations numériques d'écoulements en canal emploient des conditions aux limites périodiques qui présentent l'avantage de conserver la nature des équations aux limites du domaine de calcul. Toutefois, ces conditions aux limites ne peuvent être utilisées que si l'état turbulent est similaire en entrée et en sortie. Dans le cas où la présence d'un objet immergé modifie la nature de l'écoulement, l'utilisation de conditions périodiques peut imposer d'augmenter la taille du domaine de calcul afin que l'écoulement en sortie soit complètement relaxé. L'utilisation de conditions aux limites dites « ouvertes », qui consiste à évaluer la sortie de l'écoulement à partir d'équations simplifiées et qui n'impliquent pas d'équivalence entre l'entrée et la sortie de l'écoulement, permet de travailler avec des domaines de taille réduite et d'effectuer une économie substantielle en temps de calcul.

L'implémentation de cette configuration est une première étape indispensable à l'étude d'un écoulement autour d'un obstacle. La configuration ouverte ne concerne que la direction de l'écoulement ( $x$ ) et peut admettre différents types de conditions

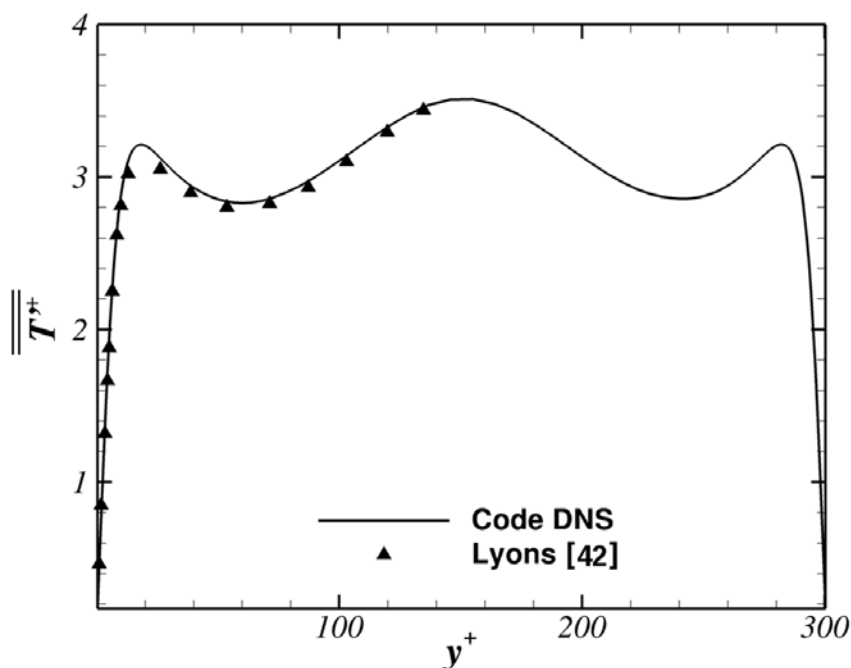


FIGURE 5.2 – Moyenne quadratique des fluctuations de température exprimée dans les échelles internes

aux limites dans les autres directions. On ne fera donc aucune hypothèse sur la nature des conditions aux limites utilisées dans ces directions.

#### 4.1.1 Condition d'entrée

La condition d'entrée joue un rôle évident dans l'écoulement à l'intérieur du domaine de calcul et doit donc en reproduire la dynamique le plus fidèlement possible. Dans le cas simple, où l'on souhaite étudier le développement de la turbulence à partir de l'état laminaire ou étudier le comportement d'un écoulement laminaire autour d'un obstacle, l'écoulement en entrée peut être défini par un profil uniforme ou un profil de Poiseuille dans le cas d'un écoulement en canal. En revanche, l'étude du comportement des écoulements turbulents requiert l'utilisation de conditions d'entrée qui reproduisent fidèlement les principales statistiques de la turbulence et est, à cet égard, beaucoup plus délicate.

L'approche du « recyclage » [43] a été retenue pour sa simplicité d'implémentation et son haut degré de précision. Cette approche, valable uniquement dans les cas

où l'écoulement en entrée peut être considéré comme pleinement développé, consiste à alimenter l'entrée du domaine par une série temporelle générée par une simulation auxiliaire. Le caractère pleinement développé de la turbulence permet d'utiliser des conditions aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement de la simulation auxiliaire. Le coût de cette approche dépend essentiellement du nombre de Reynolds considéré. Les simulations à faible nombre de Reynolds tolèrent l'utilisation de maillages relativement grossiers et, dans ce cas, le stockage d'un champ 2D à chaque itération de la simulation auxiliaire ne pose pas de problème particulier. Les données produites par la simulation auxiliaire peuvent être conservées pour être réutilisées en condition d'entrée d'autres simulations, ce qui amorti très rapidement son coût. Dans le cas de simulations à haut nombre de Reynolds, le raffinement du maillage, ainsi que la réduction du pas de temps, interdit généralement le stockage des données de la simulation auxiliaire. Les simulations auxiliaires et principales doivent alors être lancées simultanément afin que les données de la simulation auxiliaire puissent être effacées rapidement après leur utilisation par la simulation principale.

La validation du nouveau code a été réalisée à partir de simulation à bas nombre de Reynolds pour lesquelles l'approche du recyclage est parfaitement adaptée. Dans les autres cas, l'utilisation d'approches synthétiques est souvent indispensable. Ces approches consistent à utiliser un champ aléatoire généré de façon à satisfaire les principales statistiques de l'écoulement (moyennes, moment d'ordre 2 et contraintes de Reynolds, notamment). Une distance de relaxation (généralement de l'ordre de 10 fois la demi-hauteur du canal) est généralement nécessaire pour obtenir l'état turbulent développé souhaité. Le lecteur intéressé pourra trouver une revue détaillée de ces approches dans la thèse de Nicolas Jarrin [43].

#### 4.1.2 Condition de sortie

La condition de sortie implémentée pour cette étude est de type radiatif. Ces conditions peuvent être vues comme une approximation des équations de Navier-Stokes n'impliquant que les termes prédominants. On notera que la condition de sortie libre

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5.21)$$

souvent utilisée pour sa simplicité, est inadaptée à l'étude d'écoulement turbulents en raison de l'instabilité engendrée par des oscillations non physiques du champ



de pression [44]. Les conditions radiatives peuvent prendre différentes formes selon le degré de précision recherché, les formes les plus simples se résument à une simple équation d'onde [45] tandis que les plus complexes font intervenir l'ensemble des termes des équations de Navier-Stokes [44, 46].

Trois conditions de sortie radiatives, de différents degrés de sophistication, ont été implémentées. Ces conditions peuvent s'exprimer selon la forme générale :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_m(y, z) \frac{\partial u_i}{\partial x} = a_m D(y, z) + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \quad (5.22)$$

où  $c$  représente la vitesse de phase et  $D(y, z) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}$  les termes diffusifs dans les directions  $y$  et  $z$ . Dans cette expression, les différentes variantes sont désignées par l'indice  $M$  selon leur degré de sophistication. Le cas  $M = 1$ , le plus simple, fait intervenir une vitesse de phase uniforme  $c_1 = 0.8U_c$  correspondant à la vitesse de convection des structures de l'écoulement. Le cas  $M = 2$  correspond à l'utilisation de la valeur moyenne de  $U$  à la distance  $y$  de la paroi ( $c_2 = U(y)$ ). Enfin, le cas  $M = 3$ , correspond à la vitesse longitudinale locale  $c_3 = u(x, y, z)$ . Les termes diffusifs sont négligés pour les conditions 1 et 2 ( $a_1 = a_2 = 0$ ) et n'interviennent que dans la condition 3 ( $a_3 = 1$ ) où  $D$  est défini à partir des termes diffusifs dans les directions  $y$  et  $z$ .

On notera que dans le cas de la composante longitudinale  $u$ , normale aux plans d'entrée et de sortie, la résolution de l'équation de Poisson se base sur une hypothèse de gradient local nul aux limites ( $\frac{\partial p'}{\partial x} = 0$ ). Il est cependant nécessaire de respecter la conservation du débit entre l'entrée et la sortie du domaine. Le gradient de pression à la sortie du domaine est donc déterminé de façon à corriger le débit en sortie  $D_s$  à partir du débit d'entrée  $D_e$  :

$$\left. \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right|_s = D_e - D_s \quad (5.23)$$

En première analyse, le choix de la condition de sortie peut apparaître assez secondaire, les erreurs commises étant supposées être convectées en dehors du domaine de calcul et avoir, de fait, un effet limité sur l'écoulement en amont. L'étude menée par Miyauchi et al. [44] montre toutefois que le choix de conditions de sortie trop simplistes peut conduire à des perturbations non physiques dans le champ de pression. En particulier, la condition de sortie libre souvent utilisée pour sa simplicité est clairement inadaptée pour la simulation d'écoulements turbulents en raison de l'instabilité engendrée par les oscillations non physiques du champ de pression.

### 4.1.3 Influence des conditions d'entrée/sortie sur l'intérieur du domaine

Les conditions aux limites de sortie correspondant à  $M = 1, 2$  et  $3$  ont été appliquées sur un écoulement faiblement turbulent ( $Re_\tau = 180$ ). Le cas  $M = 1$  a été testé avec trois vitesses de sortie différentes : une vitesse faible (cas 1A,  $c_1 = 0.3$ ) devant la vitesse moyenne de l'écoulement, une vitesse correspondant à la vitesse de convection des structures de l'écoulement (cas 1B,  $c_1 = 0.8U_c$ ) et une vitesse élevée (cas 1C,  $c_1 = 1.2$ ) devant l'écoulement moyen. La condition d'entrée est issue d'une simulation périodique dans les directions  $x$  et  $z$ . Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur une grille relativement grossière ( $129 \times 109 \times 65$ ) selon les schémas de différence finies d'ordre 2 standards.

Les fluctuations de vitesse obtenues sont quasiment identiques au cas périodique pour tous les cas testés à 0.5% près et ne sont donc pas présentés ici. La figure 5.3 présente les fluctuations de la pression pour le cas périodique, les cas  $M = 1$  avec les vitesses (0.3, 0.6 et 1.2),  $M = 2$  et  $M = 3$ . L'écart significatif constaté entre les cas 1A et 1C et le cas périodique n'est pas surprenant et s'explique par le fait que les vitesses de sortie appliquées ne correspondent pas à la physique de l'écoulement. On constate par ailleurs que le cas 1B est en très bon accord avec le cas périodique, malgré la nature simplifiée de la condition de sortie utilisée.

Les profils de fluctuations sont un indicateur « global » de la qualité d'une condition aux limites mais ils ne fournissent cependant aucune information sur la présence d'oscillations factices engendrées par la condition de sortie ou encore sur la distance de « relaxation » à partir de laquelle on peut négliger l'effet de la condition d'entrée ou de sortie sur l'écoulement. La figure 5.4 montre les variations du profil de la vitesse longitudinale moyennée en temps et selon la direction  $z$  (transverse) en fonction de la distance dans la direction de l'écoulement, à  $y/h = 0.1$  (proximité immédiate de la paroi), 0.2 et 1 (centre du canal). On remarque la présence d'oscillations du côté de la sortie du canal, à l'échelle de la grille, particulièrement marquées dans les cas 1A et 3. L'enveloppe des courbes 1A et 3 semble également affectée par la condition de sortie et amorcent une descente vers la sortie du canal. La condition 1B génère en revanche des oscillations beaucoup plus réduites et ne modifie pas significativement la valeur de la vitesse moyenne en sortie. Il est important de souligner que, bien que l'utilisation de la vitesse locale semble plus pertinente que l'utilisation d'une vitesse de sortie constante ou moyennée, le cas  $M = 3$  produit des oscillations quasiment aussi marquées que le cas 1 et n'est donc pas une bonne condition de sortie. Cette

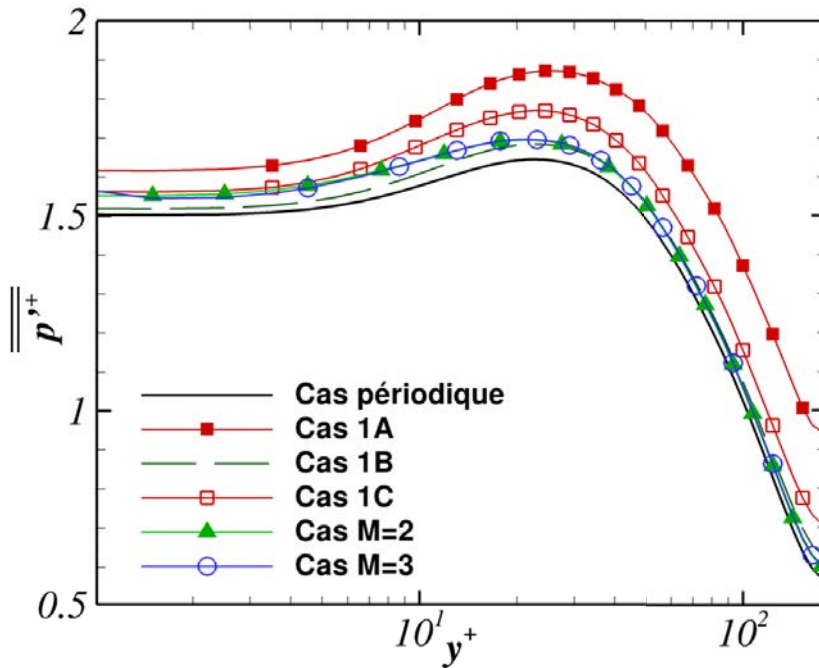


FIGURE 5.3 – Écart type de la pression pour les différents cas testés en fonction de la distance  $y$  aux parois

contre-performance liée à l'utilisation de la vitesse locale a déjà été observée dans la littérature [44] et peut s'expliquer par les instabilités pouvant être générées par l'interdépendance entre la vitesse locale et la condition de sortie.

## 4.2 Prise en compte du corps immergé

### 4.2.1 Choix de la méthode

Comme indiqué précédemment, le principal intérêt de disposer d'une configuration ouverte est de pouvoir envisager l'étude d'écoulement inhomogènes dans la direction de l'écoulement et notamment, la présence d'un corps immergé. Deux grandes approches de modélisation sont généralement utilisées : l'utilisation d'un « maillage conforme » dont les points coïncident avec les contours de l'objet et les approches de type « frontières immergées » (FI) qui consistent à utiliser diverses stratégies afin de permettre une résolution efficace des équations de Navier-Stokes dans un maillage indépendant de l'objet immergé.

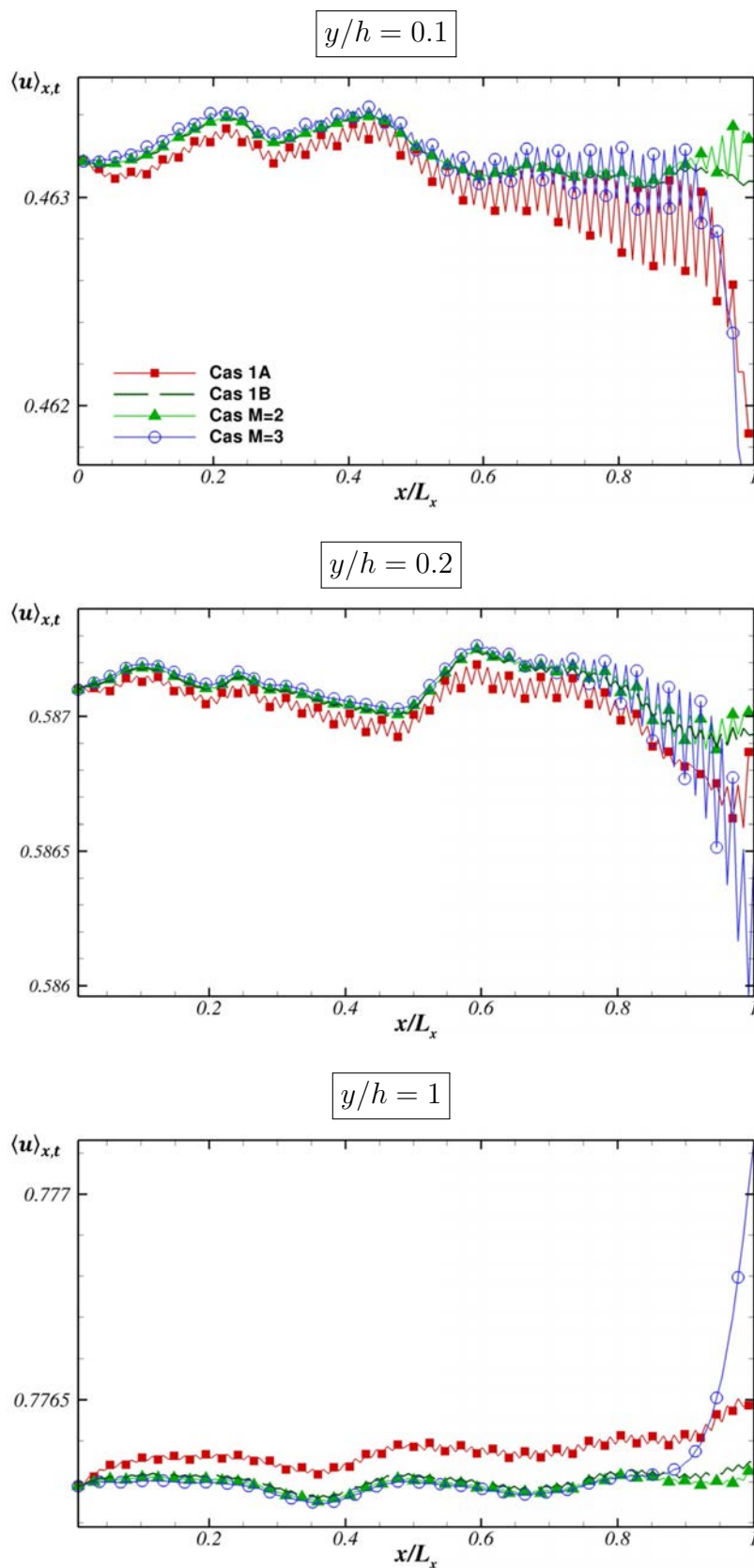


FIGURE 5.4 – Évolution de la vitesse longitudinale (moyennée en temps et dans la direction  $z$ ) selon la direction de l'écoulement en  $y/h = 0.1, 0.2$  et  $1$

Le principal intérêt de l'approche conforme est de permettre d'ajuster localement la résolution à proximité de l'objet afin de limiter la taille globale du maillage. L'étape préliminaire de génération du maillage peut cependant devenir extrêmement délicate selon le degré de complexité de la forme de l'objet. En particulier, il est rare de disposer d'une méthode de génération qui s'adapte parfaitement aux contours de l'objet tout en préservant la précision et la convergence de la résolution [47]. Par ailleurs, dans le cas d'une grille non structurée, l'utilisation d'une approche spectrale est inenvisageable et la résolution de l'équation de Poisson doit être effectuée selon une méthode multigrille dont l'implémentation sur une grille non-structurée est extrêmement délicate. En particulier, en ce qui concerne la génération de la grille grossière à partir de la grille principale, il n'existe pas, pour l'heure, d'approche suffisamment simple à implémenter (c'est-à-dire pouvant être implémentée dans le cadre de cette thèse) et qui offre un degré de précision satisfaisant, quelle que soit la grille considérée. Les différentes approches multigrilles envisageables sont décrites en détail dans le rapport de Mavriplis [48].

L'approche de type FI a été retenue pour cette étude en raison de sa simplicité d'implémentation et de sa faible sensibilité à la géométrie du corps immergé en comparaison avec l'approche de la grille conforme. En effet, l'absence de contraintes relatives à la géométrie du corps sur la grille, autorise l'utilisation d'une grille cartésienne beaucoup plus facile à manipuler tant dans la résolution de l'équation de Poisson que dans l'estimation des termes de l'équation de Navier-Stokes.

#### **4.2.2 Approche FI implémentée**

Les méthodes FI se décomposent en deux grandes catégories (continues et discrètes). Les approches de type continu consistent à introduire dans les équations de Navier-Stokes non-discrétisées un terme de forçage assimilé à une force physique répondant aux contraintes imposées par l'écoulement. Cette approche est particulièrement pertinente pour l'étude d'écoulement autour de corps déformables pour lesquelles le terme de forçage a un sens physique profond mais pose de sérieuses difficultés dans la limite rigide où la plupart des modèles physique présentent un comportement singulier. Les approches discrètes se distinguent des approches continues dans le fait qu'elles intègrent des informations concernant la discrétisation (schéma de calcul utilisé, distance entre un nœud et la surface immergée etc.) et permettent de ce fait un contrôle optimal de la vitesse imposée aux frontières du corps immergé. Les approches de type FI ont fait l'objet de nombreux développements depuis leur

introduction et la littérature en propose de nombreuses déclinaisons. Le lecteur intéressé pourra se référer au travail de revue de Mittal et al. [49] traitant autant des approches de type continu que des approches discrètes.

L'approche implémentée est une approche discrète directe basée sur l'imposition directe d'une vitesse cible nulle pour tous les points situés à l'intérieur du corps immergé. Il est à noter que cette approche, choisie pour sa simplicité, induit une discontinuité à la frontière solide/fluide et est de fait particulièrement sensible au nombre de points voisins utilisés dans les schémas de calcul. En particulier, les schémas explicites optimisés ou compacts génèrent des oscillations factices à proximité immédiate du corps qui se propagent à l'ensemble de l'écoulement. L'usage de tels schémas demanderait un calibrage plus élaboré consistant, par exemple, à déterminer la vitesse cible selon une condition d'antisymétrie de part et d'autre de la frontière de façon à éliminer toute discontinuité tout en préservant la vitesse nulle aux frontières [50]. Dans la pratique, cette approche soulève de nombreuses difficultés, notamment pour les points situés à proximité de l'interface qui posent, par exemple, la question de choisir dans quelle direction appliquer la condition d'antisymétrie. Cette approche n'ayant pas encore été implémentée, les résultats d'écoulements autour de corps immergés présentés dans la suite de ce chapitre ont été obtenus exclusivement avec la configuration O2 du code, peu sensible à la discontinuité corps/fluide.

#### 4.2.3 Intégration à la méthode du pas fractionné

Dans le cadre de l'approche du pas fractionné utilisée dans le code DNS, l'imposition de la vitesse cible doit être effectuée sur le champ de vitesse intermédiaire  $\tilde{\mathbf{u}}$  avant la dernière étape de correction du pas fractionné. La vitesse cible  $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{c}}$ , imposée au champ de vitesse intermédiaire à l'intérieur du corps, est déterminée de façon à obtenir une vitesse nulle ( $\mathbf{u}_{body}^{n+1} = 0$ ) au pas de temps suivant :

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{u}_{body}^{n+1} - \mathbf{grad}(p^{n+1}) = \mathbf{V}_{\mathbf{c}} - \mathbf{grad}(p^{n+1}) \quad (5.24)$$

La pression au pas de temps suivant étant initialement inconnue, la vitesse  $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{c}}$  imposée au champ de vitesse intermédiaire est évaluée selon une démarche itérative. Dans un premier temps, le gradient de pression au pas de temps courant est utilisé comme une première approximation du gradient de pression à l'itération suivante ( $\mathbf{grad}(P^{n+1}) = \mathbf{grad}(P^n)$ ). La résolution de l'équation de Poisson permet d'obtenir une nouvelle estimation du gradient de pression qui est alors réinjecté dans l'équation

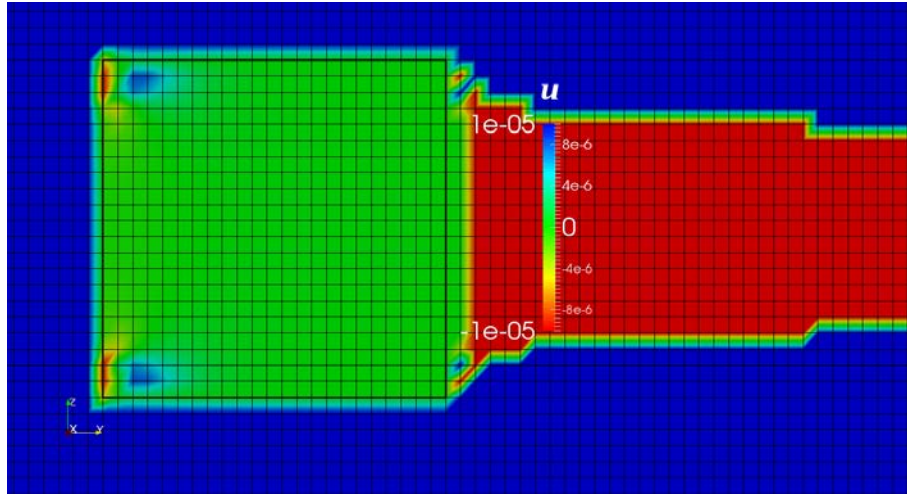
5.24 afin d'obtenir une nouvelle estimation de  $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{c}}$ . Bien qu'idéalement le processus devrait être répété jusqu'à l'obtention d'une convergence complète, nous verrons dans la section suivante dédiée à la validation de la méthode que la première itération est suffisante pour obtenir une vitesse cible proche de 0.

### 4.3 Application à un écoulement autour d'un corps chauffant

L'approche FI a été appliquée au cas d'un écoulement uniforme circulant autour d'un cylindre rectangulaire chauffant le fluide environnant. La taille du cylindre est  $d = 0.1h$ . Le cylindre est placé au centre du canal à une distance  $L_u = 5d$  de l'entrée du canal et la distance séparant la face arrière du cylindre à la sortie de l'écoulement vaut  $L_d = 15d$ . La taille totale du domaine dans la direction longitudinale est donc  $L_x = 21d$ . Les tests effectués sur le positionnement du cylindre par Sohankar et al. [51] dans le cas d'un scalaire passif montrent que des valeurs de  $L_u$  et  $L_d$  plus élevées ne modifient pas les statistiques de l'écoulement au-delà de 1%. Ces distances permettent donc de garantir une influence limitée des conditions de sortie et d'entrée sur l'écoulement autour du cylindre. La taille du cylindre correspond à un coefficient de blocage ( $B = d/2h$ ) de 0.05 identique à celui utilisé dans l'étude de Chatterjee et al. [52] qui sera utilisée comme référence. La simulation a été réalisée dans un maillage uniforme comportant  $N_x = 420$  et  $N_y = 400$  points dans les directions longitudinales et verticales de façon à obtenir une résolution du maillage autour de l'objet de 20 mailles en longueur et en hauteur [52]. Enfin comme indiqué précédemment, les équations de Navier-Stokes sont discrétisées selon les schémas de différence finie d'ordre 2 standards peu sensibles à la discontinuité corps/fluide.

Afin de réduire au maximum les temps de calcul, la vitesse cible, nulle à l'intérieur du cylindre, est imposée en une seule itération. La figure 5.5 montre la vitesse résiduelle à l'intérieur du cylindre. La vitesse moyenne est de l'ordre de  $8 \times 10^{-8}$  et la vitesse maximale obtenue reste faible  $6 \times 10^{-6}$ . La vitesse cible est donc correctement imposée dès la première itération et il n'est pas nécessaire d'aller au-delà.

Les figures 5.6 et 5.7 montrent les résultats obtenus pour  $Re = 20$  et  $Re = 40$ . Le nombre de Prandtl  $Pr$  considéré pour le transport de la température est identique à celui utilisé par [52] ( $Pr = 0.7$ ). On notera que les nombres de Reynolds indiqués ici sont définis à partir de la taille du cylindre par  $Re = U_e d / \nu$ ,  $U_e$  étant la vitesse du fluide en entrée. La figure 5.6 montre les lignes de courant ainsi que la courbe  $u = 0$  (en blanc). On remarque la formation de deux tourbillons situés derrière le cylindre

FIGURE 5.5 – Vitesse  $u$  résiduelle à l'intérieur du corps immergé

et symétriques par rapport au centre du canal, tournant dans le sens des aiguilles d'une montre pour le tourbillon supérieur et dans le sens contraire pour le tourbillon inférieur. L'intersection entre la ligne  $u = 0$  et le centre du canal correspond au point de stagnation qui se situe approximativement à  $L_s = 1.2$  pour  $Re = 20$  et  $L_s = 2.5$  pour  $Re = 40$ . Ces résultats sont relativement proches des valeurs de 1.3 et 2.7 relevées par [52] pour les mêmes nombres de Reynolds. Les lignes isothermes autour de l'objet sont montrées dans la figure 5.7 et superposées avec les résultats issus de [52]. Les lignes isothermes obtenues coïncident de manière très satisfaisante jusqu'à  $T = 0.4$ . L'écart constaté au-delà reste raisonnable si on le compare à la distance de l'objet.

## 5 Conclusions

L'extension de l'approche spectrale, utilisée pour la résolution de l'équation de Poisson, à des conditions aux limites non périodiques a permis d'améliorer fortement la genericité du code et de l'appliquer au cas d'un écoulement autour d'un corps chauffant. Il est à noter que les méthodes numériques employées sont relativement simples et que la précision des résultats obtenus pourrait être encore améliorée en utilisant des méthodes plus élaborées. Notamment, l'approche FI implémentée consiste à imposer une vitesse nulle à l'intérieur du corps sans ajuster le champ de vitesse des points bordant la frontière immergée. Idéalement, la vitesse en ces points devraient être ajustée en fonction de leur distance à la surface de l'objet afin



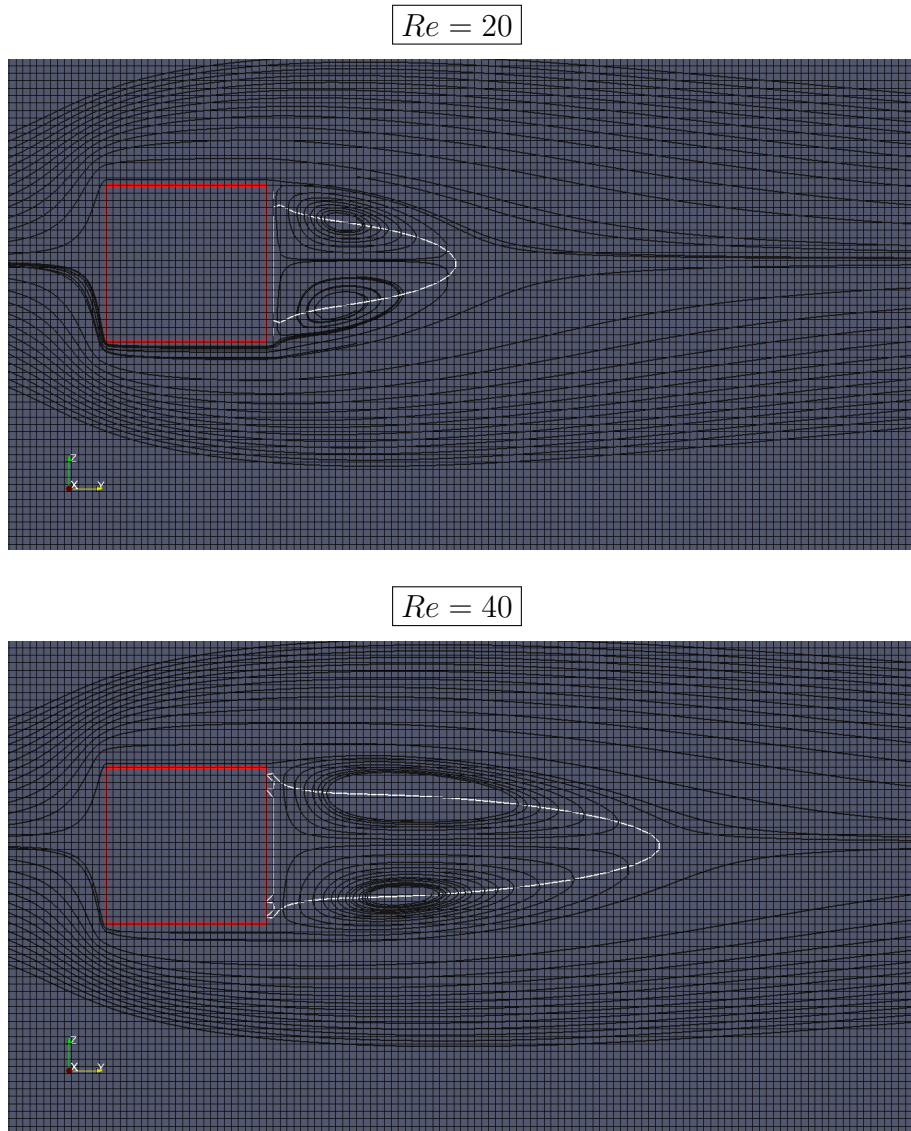


FIGURE 5.6 – Lignes de courant pour  $Re = 20$  (en haut) et  $Re = 40$  (en bas)

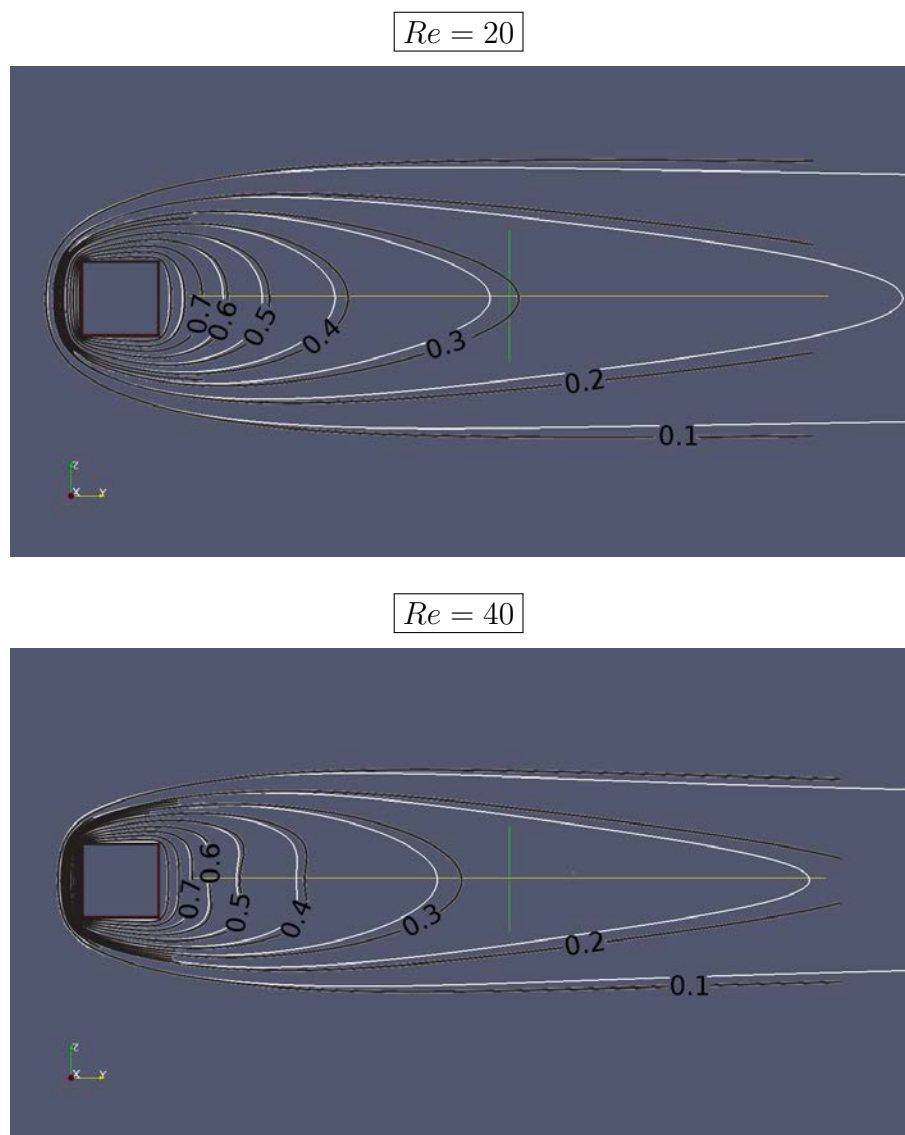


FIGURE 5.7 – Lignes de température pour  $Re = 20$  (en haut) et  $Re = 40$  (en bas)

de tenir compte de la forme réelle du corps immergé (voir, par exemple, [53]). Par ailleurs, l'imposition d'une vitesse nulle à l'intérieur de l'objet immergé induit une discontinuité à la frontière fluide/corps immergé qui interdit l'utilisation de schémas à haute précision, impliquant un grand nombre de points voisins, et impose l'utilisation de schémas classiques d'ordre 2. Ce problème peut être résolu en imposant une condition d'antisymétrie pour le champ de vitesse à l'intérieur de l'objet [50].

Malgré ces limitations, les résultats présentés ici sont en bon accord avec les résultats précédemment obtenus dans la littérature [52] et démontrent la capacité du nouveau code à être appliqué à des configurations d'écoulements plus complexes, plus proches de celles habituellement rencontrées dans les contextes industriels ou dans la vie courante. Le code a récemment été étendu afin de permettre la simulation d'écoulement multiphasiques.

# Troisième partie

## Simulation et étude statistique d'écoulements à nombres de Reynolds modérés

Les optimisations apportées au code DNS ont permis de réaliser des simulations à des nombres de Reynolds modérés ( $Re_\tau = 590$  et  $Re_\tau = 1100$ ) mais relativement élevés au regard des nombres habituellement atteints en simulation numérique directe. D'autres simulations à nombres de Reynolds plus réduits ont également été effectuées ( $Re_\tau = 180$  et  $Re_\tau = 395$ ) afin de pouvoir étudier l'influence du nombre de Reynolds sur la dynamique de l'écoulement.

Cette partie propose une étude détaillée des principales statistiques de l'écoulement pour les nombres de Reynolds considérés. Le chapitre 6 présente les principaux modèles théoriques actuels afin de donner au lecteur un aperçu général de la turbulence de parois et de construire un cadre d'interprétation pour les résultats présentés par la suite. Le chapitre 7 comporte l'essentiel des statistiques de vitesse rencontrées dans la littérature (vitesse moyenne, intensité turbulente, analyse spectrale). Ce chapitre se propose également d'adapter certaines approches expérimentales, telles que la caractérisation des structures à partir d'une étude des corrélations entre deux points dans les champs de vitesse filtrés [54], qui n'avaient jusqu'alors pas été réalisées numériquement. Le chapitre 8 sera consacré à l'étude des statistiques de vorticité et, plus particul  rement, des équations de transport de la vorticité qui n'ont à ce jour, pas encore été présentées dans la littérature. Enfin, le chapitre 9 s'intéressera à la contribution des fluctuations de vitesse à la production en fonction de leur intensité à travers l'étude des statistiques de Palm.



# Chapitre 6

## Mise en contexte de la turbulence pariétale

### 1 Introduction

Le développement des techniques d'observation expérimentales telles que la vélocimétrie par images de particules (VIP) puis l'émergence des simulations numériques a permis d'importantes découvertes en turbulence de paroi et a profondément fait évoluer notre vision dans ce domaine. La découverte des structures tourbillonnaires a ouvert la voie à une description déterministe des écoulements de paroi basée sur la phénoménologie de ces structures. La turbulence de paroi reste cependant un domaine très complexe et beaucoup de questions restent ouvertes. Notamment, le comportement du profil de vitesse moyen à une distance intermédiaire de la paroi, dans la couche dite de recouvrement, continue de diviser les tenants d'une loi logarithmique et les tenants d'une loi de puissance entre la vitesse et la distance aux parois. Les processus de génération et de maintien des structures tourbillonnaires restent en grande partie à découvrir.

L'objectif de ce chapitre est de présenter brièvement la vision moderne de la turbulence de paroi afin de permettre l'analyse et l'interprétation des résultats de simulations qui seront présentés par la suite. Dans un premier temps, la turbulence de paroi sera décrite de manière générale à travers les équations de mouvement et de transport d'énergie turbulente. La question des échelles gouvernant l'écoulement sera également abordée. Les lois logarithmique et de puissance pour la vitesse moyenne dans la couche de recouvrement, et les hypothèses sous-jacentes, seront ensuite brièvement présentées et discutées. Enfin, la dernière partie sera consacrée aux structures cohérentes et à leurs effets sur la dynamique de la turbulence. La

modélisation des structures cohérentes à travers le concept de structures attachées de Townsend sera notamment abordée.

## 2 Description générale

### 2.1 Equation de Reynolds moyennée et contrainte totale

On rappelle que dans le cas d'un écoulement incompressible non soumis à des forces volumiques, les équations de Navier-Stokes sur la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

où  $\rho$  et  $\nu$  sont la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide. L'incompressibilité de l'écoulement s'exprime par une condition de divergence nulle sur le champ de vitesse  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ .

La vitesse instantanée  $u = U + u'$  peut être décomposée en une partie moyennée  $U$  (en temps et/ou en espace) et en une partie fluctuante  $u'$ . La composante moyenne est alors décrite par les équations de Reynolds, qui découlent directement de l'application de l'opérateur de moyenne à l'équation de Navier-Stokes qui s'écrivent, dans le cas d'un écoulement pleinement développé et homogène en  $x$  (direction de l'écoulement) et en  $z$  (direction transverse) :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau(y)}{\partial y} \quad (6.1)$$

où  $\tau(y) = -\rho \overline{u'v'} + \rho \nu \frac{\partial U}{\partial y}$  est la contrainte totale,  $y$  étant la direction normale aux parois.

Aux parois, la contrainte de Reynolds  $-\rho \overline{u'v'}$  est nulle et la contrainte totale est donnée par  $\tau_w = \rho u_\tau^2 = \rho \nu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}$ . Au centre du canal, la contrainte de Reynolds est nulle pour des raisons de symétrie et la vitesse de l'écoulement est maximale. La contrainte totale est donc nulle. L'intégration de la relation 6.1 permet d'obtenir l'expression de la contrainte totale sous la forme d'une loi linéaire et indépendante de l'écoulement considéré :

$$-\rho \overline{u'v'} + \rho \nu \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (6.2)$$

Par commodité, la contrainte de Reynolds  $-\overline{u'v'}$  est très souvent associée à une

viscosité effective dite turbulente afin de factoriser le gradient de vitesse moyenne :

$$\rho(\nu_t(y) + \nu) \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (6.3)$$

Il est important de préciser que cette loi linéaire est une loi exacte, au sens où elle découle directement des équations de Navier-Stokes, valable dans tout le canal. La loi linéaire 6.2 est donc souvent utilisée comme un critère de validation des résultats obtenus, dont le non respect doit systématiquement mener à s'interroger sur les imprécisions de mesure dans le cas d'études expérimentales ou sur la validité ou la précision des algorithmes utilisés dans le cas de simulations numériques.

## 2.2 Transport des contraintes de Reynolds

L'équation de la composante fluctuante du champ de vitesse  $u'$  s'obtient en retranchant l'équation de Reynolds moyennée à l'équation de Navier-Stokes sur  $u = U + u'$  :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (6.4)$$

On effectue ensuite le produit de cette équation par  $u'_j$  et le produit de l'équation de  $\frac{\partial u'_j}{\partial t}$  par  $u'_i$  que l'on ajoute de façon à obtenir l'équation de transport du produit  $u'_i u'_j$  et de la contrainte de Reynolds associée  $\rho u'_i u'_j$ . La moyenne de cette équation s'écrit alors, après simplifications :

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} = \mathcal{P}_{ij} + T_{ij} + \pi_{ij}^{(s)} + \pi_{ij}^{(d)} + \tilde{D}_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij} \quad (6.5)$$



Avec :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ij} &= -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{x_k} \\
 T_{ij} &= -\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} \\
 \pi_{ij}^{(s)} &= \frac{1}{\rho} p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \\
 \pi_{ij}^{(d)} &= -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{p' u'_j}}{x_i} + \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{x_j} \right) \\
 \tilde{D}_{ij} &= \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l \partial x_l} \\
 \tilde{\epsilon}_{ij} &= 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l}}
 \end{aligned}$$

Par la suite, les quantités  $\overline{u'_i u'_j}$  seront assimilées aux contraintes de Reynolds, la masse volumique  $\rho$  étant constante. Les termes  $\mathcal{P}_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $\tilde{D}_{ij}$  et  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  sont respectivement associés à la production, au transport turbulent, à la diffusion et à la dissipation de la contrainte  $\overline{u'_i u'_j}$ . Les termes  $\pi_{ij}^{(s)}$  et  $\pi_{ij}^{(d)}$  font tous deux intervenir la pression et sont respectivement appelés « terme de corrélation pression-déformation » et « terme de diffusion turbulente de pression ».

Une autre équation importante est celle de l'énergie turbulente moyenne  $\overline{K} = \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k}$  qui s'obtient très facilement à partir de l'équation 6.5 en faisant la somme des équations pour les contraintes de Reynolds  $\overline{u'_1 u'_1}$ ,  $\overline{u'_2 u'_2}$  et  $\overline{u'_3 u'_3}$  :

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{\mathcal{P}_K} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k K}}_{T_K} + \underbrace{0}_{\pi_K^{(s)}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{p' u'_k}}_{\pi_K^{(d)}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{K}}{\partial x_i \partial x_i}}_{\tilde{D}_K} - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}}_{\tilde{\epsilon}_K} \quad (6.6)$$

où  $\mathcal{P}_K$  est le terme de production,  $T_K$  le terme de transport turbulent,  $\pi_K^{(d)}$  le terme de diffusion turbulente de pression,  $\tilde{D}_K$  le terme de *pseudo*-dissipation et  $\tilde{\epsilon}_K$  le terme de *pseudo*-dissipation. Le terme de corrélation pression-déformation  $\pi_K^{(s)}$  est nul du fait de la condition d'incompressibilité de l'écoulement. Le qualificatif *pseudo* associé aux termes  $\tilde{D}_K$  et  $\tilde{\epsilon}_K$  provient du fait que ceux-ci sont en réalité des formes incomplètes de la dissipation réelle  $\epsilon_K = \nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)$  et de la diffusion réelle

$D_K = \nu \frac{\partial}{\partial x_i} u'_k \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)$  de l'énergie cinétique. Le lecteur intéressé par l'obtention des formes complètes de la dissipation et de la diffusion pourra se référer à l'ouvrage de Davidson [55]. On se contentera de préciser ici que l'application de la condition d'incompressibilité  $\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0$  permet de montrer que  $\tilde{D}_K - \tilde{\epsilon}_K = D_K - \epsilon_K$  et d'exprimer l'équation de transport 6.6 à partir de la dissipation et de la diffusion réelles.

Dans le cas d'un écoulement en canal homogène dans les directions  $x$  et  $z$ , les contraintes  $\overline{u'w'}$  et  $\overline{v'w'}$  sont nulles. Par ailleurs, les contraintes ne sont pas autonomes et interagissent les unes avec les autres. L'étude des équations de transport de chaque contrainte prise individuellement permet d'identifier les interactions entre les différentes contraintes. L'équation de transport 6.5 pour la composante  $\overline{u'_1 u'_1}$  s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{u'_1 u'_1}}{\partial t} = \underbrace{-2\overline{u'_1 u'_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}}_{\mathcal{P}_{11}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_1 u'_1 u'_2}}{\partial x_2}}_{T_{11}} + \underbrace{\frac{2}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}}}_{\pi_{11}^{(s)}} \underbrace{-0}_{\pi_{11}^{(d)}} + \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{u'_1 u'_1}}{\partial x_2 \partial x_2}}_{\tilde{D}_{11}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_l}}_{\tilde{\epsilon}_{11}} \quad (6.7)$$

Les équations de transport pour les contraintes  $\overline{u'_2 u'_2}$ ,  $\overline{u'_3 u'_3}$  et  $\overline{u'_1 u'_2}$  s'écrivent :

$$\frac{\partial \overline{u'_2 u'_2}}{\partial t} = \underbrace{0}_{\mathcal{P}_{22}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_2 u'_2 u'_2}}{\partial x_2}}_{T_{22}} + \underbrace{\frac{2}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u'_2}{\partial x_2}}}_{\pi_{22}^{(s)}} - \underbrace{\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{p' u'_2}}_{\pi_{22}^{(d)}} + \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{u'_2 u'_2}}{\partial x_2 \partial x_2}}_{\tilde{D}_{22}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_l}}_{\tilde{\epsilon}_{22}} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \overline{u'_3 u'_3}}{\partial t} = \underbrace{0}_{\mathcal{P}_{33}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_2 u'_3 u'_3}}{\partial x_2}}_{T_{33}} + \underbrace{\frac{2}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u'_3}{\partial x_3}}}_{\pi_{33}^{(s)}} \underbrace{-0}_{\pi_{33}^{(d)}} + \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{u'_3 u'_3}}{\partial x_2 \partial x_2}}_{\tilde{D}_{33}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_3}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u'_3}}{\partial x_l}}_{\tilde{\epsilon}_{33}} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{u'_1 u'_2}}{\partial t} = & \underbrace{-2\overline{u'_2 u'_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2}}_{\mathcal{P}_{12}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} \overline{u'_1 u'_2 u'_2}}_{T_{12}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' \left( \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} \right)}}_{\pi_{12}^{(s)}} \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{p' u'_1}}_{\pi_{12}^{(d)}} \\
 & + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u'_1 u'_2}}{\partial x_2 \partial x_2}}_{\tilde{D}_{12}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_l}}_{\tilde{\epsilon}_{12}} \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

On notera que l'alimentation des contraintes  $\overline{u'_2 u'_2}$  et  $\overline{u'_3 u'_3}$  n'est pas assurée par

les termes de production  $\mathcal{P}_{22} = \mathcal{P}_{33} = 0$  et que celle-ci ne peut donc se faire que par les termes de corrélation pression-déformation, les termes de transport et de diffusion n'étant pas des termes source. Les termes de corrélation pression-déformation sont donc nécessairement positifs et l'on peut écrire :

$$\pi_{22}^{(s)} + \pi_{33}^{(s)} = \frac{2}{\rho} \overline{p' \left( \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \right)} > 0$$

L'application de la condition d'incompressibilité donne alors :

$$\pi_{11}^{(s)} = \frac{2}{\rho} \overline{p' \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}} = -\frac{2}{\rho} \overline{p' \left( \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \right)} < 0$$

Les contraintes  $\overline{u'_2 u'_2}$  et  $\overline{u'_3 u'_3}$  sont donc alimentées par la contrainte  $\overline{u'_1 u'_1}$  par le biais des termes de corrélation pression-déformation. Par ailleurs, la contrainte  $\overline{u'_1 u'_2}$  est alimentée par la contrainte  $\overline{u'_2 u'_2}$  par le biais de son terme de production  $\mathcal{P}_{22}$ . Les interactions entre les différentes contraintes de Reynolds sont résumées dans la figure 6.1.

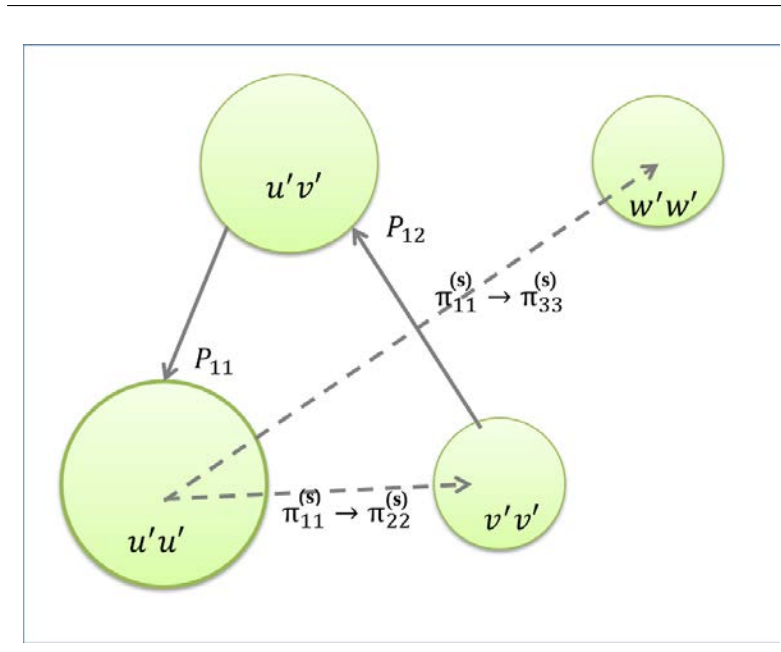


FIGURE 6.1 – Interactions entre les différentes contraintes de Reynolds

## 2.3 Modèle en couches et échelles internes et externes

L'écoulement peut être divisé en une zone interne à proximité de la paroi dominée par les effets visqueux et une zone externe, plus éloignée des parois, et influencée

par les échelles dites externes que sont, dans le cas d'un écoulement en canal, la demi-hauteur et la vitesse moyenne au centre.

Dans la couche interne ( $y/h < 0.15$ ), l'effet des échelles externes est faible ou négligeable (selon la quantité considérée) et, dans la zone proche paroi de la couche interne (couche visqueuse), l'écoulement est essentiellement gouverné par les effets visqueux et le cisaillement à la paroi. Les échelles visqueuses construites à partir de la contrainte pariétale (et donc du gradient de vitesse) et de la viscosité sont donc particulièrement adaptées à l'étude de cette couche. L'échelle de vitesse « interne » dite vitesse de friction est définie à partir de la contrainte totale aux parois par  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ . L'échelle de longueur visqueuse  $\delta_\nu$  est définie par  $\delta_\nu = \frac{\nu}{u_\tau}$ . Par la suite, les quantités seront souvent exprimées dans les échelles internes et seront alors assorties du symbole « + ». La notation « \* » utilisée pour représenter les quantités adimensionnalisées dans le cas général, sera aussi employée pour les quantités exprimées dans les échelles externes.

Dans la couche externe, la demi-hauteur  $h$  du canal joue un rôle essentiel et est une échelle de longueur naturelle pour l'étude de l'écoulement dans cette couche. L'échelle de vitesse externe peut être la vitesse moyenne au centre du canal  $U_c$  ou la vitesse débitante. Généralement, on considère que la couche externe commence à partir de  $y^+ > 30$ , distance de la paroi à partir de laquelle les échelles visqueuses peuvent être négligées.

Lorsque  $h^+$  est suffisamment grand ( $h^+ > 200$ ), les couches internes ( $y/h < 0.15$ ) et externes ( $y^+ > 30$ ) se recouvrent mutuellement dans une zone dite « de recouvrement » dans laquelle les effets visqueux et les effets externes sont faibles mais de niveaux comparables.

## 2.4 Quelques nombres de Reynolds utiles

Bien que cette thèse soit consacrée à l'étude des écoulements turbulents en canal, nous serons parfois amenés à présenter des travaux portant sur d'autres configurations d'écoulement de paroi. Il est donc utile d'introduire les différentes échelles qui seront alors utilisées ainsi que les nombres de Reynolds pouvant être construits à partir de ces échelles.

De manière générale, un écoulement est entièrement caractérisé par la viscosité du fluide, ainsi que par des échelles de longueur  $L_0$  et de vitesse  $U_0$  caractéristiques qui dépendent du type d'écoulement considéré. Les équations de Navier-Stokes ex-

primées dans les échelles  $(L_0, U_0)$  s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re_0} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}}$$

La solution de l'équation de Navier-Stokes est entièrement déterminée par le nombre de Reynolds, sans dimensions, défini par  $Re_0 = \frac{U_0 L_0}{\nu}$ . La figure 6.2 résume les différentes échelles caractéristiques des trois principales configurations d'écoulements de paroi ainsi que les nombres de Reynolds correspondants.

Dans le cas d'un écoulement en couche limite, la vitesse extérieure  $U_e$  (en dehors de la couche limite) est une échelle de vitesse naturelle, tandis que la dynamique de l'écoulement dans la direction  $y$  est contrôlée par l'épaisseur  $\delta(x)$  de la couche limite à la position  $x$  définie comme la distance à la paroi pour laquelle la vitesse longitudinale moyenne  $U(x, y)$  est égale à 99% de la vitesse extérieure. Une autre échelle de longueur souvent utilisée est l'épaisseur de déplacement définie par :

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy$$

Les nombres de Reynolds de couche limite basés sur ces échelles sont alors :

$$Re_\delta = \frac{\delta U_e}{\nu}; Re_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu} \quad (6.11)$$

Dans le cas d'un écoulement en canal ou dans une conduite circulaire, l'écoulement peut être caractérisé par la demi-hauteur  $h$  du canal (ou le rayon  $R$  de la conduite) et par la vitesse au centre du canal  $U_c$ . Le nombre de Reynolds s'écrit alors :

$$Re = \frac{h U_c}{\nu} \quad (6.12)$$

dans le cas d'un canal ou  $Re = \frac{R U_c}{\nu}$  dans le cas d'une conduite circulaire. La vitesse de friction  $u_\tau$  est également souvent utilisée comme échelle de vitesse caractéristique. Le nombre de Reynolds associé est appelé « nombre de Reynolds de friction » et s'écrit :

$$Re_\tau = \frac{h u_\tau}{\nu} \quad (6.13)$$

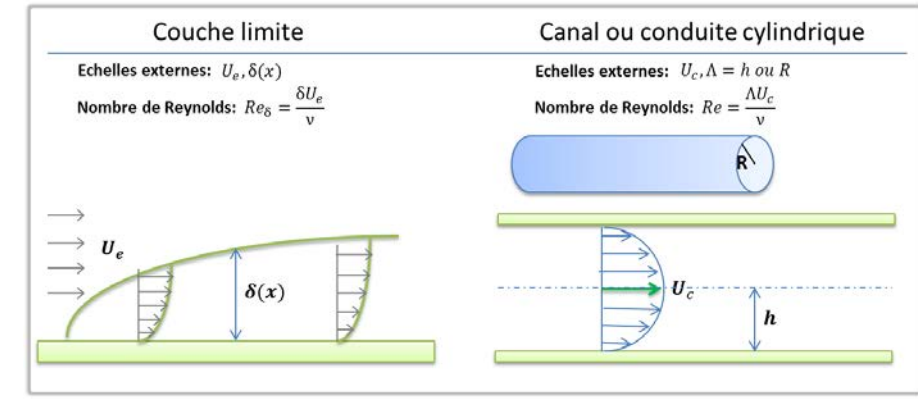


FIGURE 6.2 – Echelles externes et nombre de Reynolds associé dans le cas d'un écoulement de couche limite (à gauche), en canal ou en conduite cylindrique (à droite)

## 2.5 Nombre de Reynolds et sensibilité aux échelles internes/externes

Le nombre de Reynolds de friction  $Re_\tau$  exprimé dans les échelles externes  $(h, U_c)$  se réduit à  $Re_\tau = u_\tau^*/\nu^*$  et est donc égal à l'inverse de la longueur visqueuse  $\delta_\nu^* = \nu^*/u_\tau^* = \nu^*$  qui contrôle les effets visqueux. Ainsi une quantité  $q$  de l'écoulement est insensible aux effets visqueux si elle est indépendante du nombre de Reynolds, une fois exprimée dans les échelles externes. Inversement, une dépendance de  $q^*$  avec le nombre de Reynolds ( $q^* = f(y/h, Re_\tau)$ ) montre que la quantité  $q$  est sensible aux effets visqueux et n'est pas uniquement contrôlée par les échelles externes. Dans les échelles internes  $(\delta_\nu, u_\tau)$ , le nombre de Reynolds correspond à la demi-hauteur du canal  $Re_\tau = \frac{h}{\delta_\nu} = h^+$ . La quantité  $q^+$ , exprimée dans les échelles internes, est insensible aux échelles externes uniquement si elle ne dépend pas du nombre de Reynolds.

Il est à noter que la sensibilité de l'écoulement aux échelles externes n'est pas nécessairement négligeable dans la couche interne et dépend étroitement de la quantité considérée. Nous verrons par la suite que la vitesse moyenne dans la couche interne, exprimée dans les échelles internes, est complètement indépendante du nombre de Reynolds à proximité des parois et donc des échelles externes. A l'opposé, l'intensité des fluctuations de vitesse dans la couche interne augmente avec le nombre de Reynolds et n'est donc pas totalement insensible aux échelles externes. De manière générale, l'utilisation des échelles internes ou externes permet d'identifier la nature des mécanismes (interne, externe ou mixte) agissant sur la quantité considérée et

est à ce titre, particulièrement utile.

### 3 Lois de vitesse moyenne

La nature ouverte de l'équation de Reynolds ne permet pas la détermination purement analytique de la vitesse moyenne et nous oblige à introduire certaines hypothèses afin de pouvoir exprimer la contrainte de Reynolds  $-\overline{u'v'}$ . La nature de ces hypothèses dépend de manière évidente de la zone de l'écoulement considéré.

On considère tout d'abord l'équation de contrainte totale exprimée dans les échelles internes :

$$-\overline{u'^+v'^+} + \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = \left(1 - \frac{y^+}{h^+}\right) \quad (6.14)$$

Dans la sous-couche visqueuse, à proximité de la paroi, l'écoulement est dominé par les effets visqueux et la contrainte  $-\overline{u'^+v'^+}$  peut donc être négligée. Par ailleurs, le ratio  $y^+/h^+$  est également négligeable et l'équation de contrainte totale, exprimée dans les échelles internes 6.14 devient :

$$\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = 1$$

et conduit alors simplement à :

$$U^+ = y^+$$

Dans la couche de recouvrement, la loi logarithmique et la loi de puissance ont été utilisées à partir des années 1930 pour décrire le profil de vitesse moyen. De nombreuses approches ont été ensuite proposées pour expliquer le comportement logarithmique ou en loi de puissance de la vitesse dans cette zone comme, par exemple, l'utilisation du concept de longueur de mélange par Von Karman pour la loi logarithmique [56] ou l'approche asymptotique ([57], [58], [59]) qui permet de dériver les deux types de lois et que l'on se propose de présenter ici.

Pour commencer, on considère l'expression du gradient de vitesse moyenne obtenue par analyse dimensionnelle :

$$\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = \frac{1}{y^+} \Phi(y^+, h^+) \quad (6.15)$$

Les deux grandes approches, dites de similarité complète et incomplète, décrites dans la littérature consistent à déterminer le profil de vitesse dans la limite des très

grands nombres de Reynolds, à partir d'hypothèses sur le comportement asymptotique de la fonction  $\Phi$ . L'approche dite de similarité complète suppose alors que la couche de recouvrement devient insensible aux effets visqueux ainsi qu'aux effets des échelles externes et que la fonction  $\Phi$  tend donc vers une limite finie  $\Phi(\infty, \infty) \rightarrow \frac{1}{\kappa}$ . La vitesse moyenne est alors donnée par :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (6.16)$$

Le paramètre  $\kappa$  est appelé constante de Von Karman. Il est important de souligner que l'existence d'une similarité complète impose nécessairement  $-\overline{u'^+v'^+} \rightarrow 1$  dans la limite des grands nombres de Reynolds ( $h^+ \rightarrow \infty$ ). En effet, si l'on élimine le terme de cisaillement moyen et le terme en  $y^+/h^+$  (qui représentent respectivement les effets visqueux et externes de l'équation de Reynolds), l'équation 6.14 devient simplement  $-\overline{u'^+v'^+} = 1$ . La contrainte de Reynolds est alors définie par :

$$\overline{u'^+v'^+} = \nu_t(y^+) \frac{\partial U^+}{\partial y^+} = 1$$

$$\text{avec } \nu_t(y^+) = \kappa y^+$$

Dans l'approche de similarité incomplète [59], la fonction  $\Phi(y^+, h^+)$  présente une similarité incomplète avec  $y^+$  et aucune similarité avec  $h^+$ . La fonction  $\Phi$  s'écrit alors sous la forme :

$$\Phi = C(Re) y^{+\alpha(Re)}$$

Cette approche revient à considérer que la viscosité joue un rôle non négligeable en dehors de la couche interne. Les fonctions  $C$  et  $\alpha$  proposées par Barenblatt [59] montrent une dépendance en  $\ln(Re)$  :

$$\begin{aligned} C(Re) &= C_0 + \frac{C_1}{\ln(Re)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(Re)}\right)^2 \\ \alpha(Re) &= \frac{\alpha_1}{\ln(Re)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(Re)}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

On notera que comme  $\ln(ARe)/\ln Re \rightarrow 1$  lorsque  $Re \rightarrow \infty$ , ce choix permet de garantir que la loi d'échelle ne dépend pas de la définition du nombre de Reynolds utilisé. Le profil de vitesse s'obtient alors par intégration de l'équation 6.15 combinée



avec les expressions 6.17 de  $C$  et de  $\alpha$  :

$$U^+ = \left( \frac{C_1}{\alpha_1} + \frac{C_0}{\alpha_1} \ln(Re) \right) y^{+\frac{\alpha_1}{\ln(Re)}} \quad (6.18)$$

Après avoir analysé les données expérimentales de Nikuradze [60], Barenblatt suggère les valeurs  $\alpha_1 = 3/2$ ,  $C_0 = \sqrt{3}/2$  et  $C_1 = 15/4$ .

La question de savoir si la vitesse moyenne obéit à une loi logarithmique ou de puissance continue de faire l'objet d'un important débat dans la littérature (on pourra citer par exemple les travaux récents de Barenblatt [59] et Wosnik [58]). La raison principale de cette « ambiguïté » est que ces lois fournissent des profils de vitesse très similaires au regard de la dispersion des résultats expérimentaux. A titre d'illustration, la figure 6.3 (tirée de Pope [61]) montre les profils de vitesse prédits par les deux approches dans le cas d'un écoulement dans une conduite circulaire. On constate, en effet, que les courbes décrites par la loi logarithmique et par la loi de puissance sont très proches et restent dans la zone permise par la dispersion de données expérimentales. Par ailleurs, les simulations numériques produisent des résultats fiables et précis mais restent limitées à des nombres de Reynolds modérés et ne permettent donc pas de juger du comportement asymptotique la fonction  $\Phi$  dans la limite des grands nombre de Reynolds.

## 4 Structures cohérentes

La notion de structures cohérentes a été introduite pour désigner les structures tourbillonnaires, de formes variées, se maintenant dans l'écoulement durant un temps relativement long au regard de leur temps de retournement. Le concept de structure cohérente est intéressant à plusieurs titres. Tout d'abord, la répétition en temps et en espace de structures tourbillonnaires de même forme et pouvant affecter significativement la dynamique de l'écoulement suggère que la turbulence de paroi peut également être étudiée sous un angle déterministe, en modélisant les structures cohérentes et en étudiant leurs effets. Cette approche déterministe d'étude de la turbulence a notamment été mise en œuvre par Townsend à travers son modèle de structures attachées [4] qui sera présenté dans cette section. Par ailleurs, l'étude des mécanismes de formation et de maintien de ces structures constitue une piste intéressante pour l'élaboration de mécanismes de contrôle permettant de limiter leurs effets sur la trainée et pourrait déboucher sur de nombreuses applications industrielles.

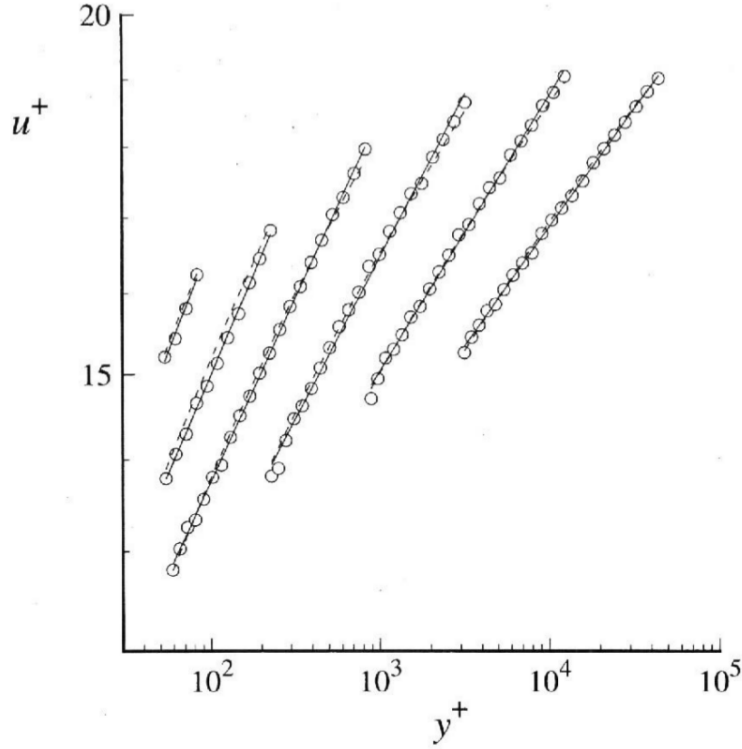


FIGURE 6.3 – Profils log-log de la vitesse moyenne dans une conduite circulaire de rayon  $R$  pour six nombres de Reynolds différents. De gauche à droite :  $Re = 32 \times 10^3$ ,  $99 \times 10^3$ ,  $409 \times 10^3$ ,  $1.79 \times 10^6$ ,  $7.71 \times 10^6$  et  $29.9 \times 10^6$ . La zone d'intérêt correspond à  $50\delta_\nu < y < 0.1R$  (couche de recouvrement). Symboles : Données expérimentales de [62], Ligne pleine : Loi de puissance, Ligne discontinue : Loi logarithmique avec  $B = 6.16$  et  $\kappa = 0.436$ . La figure est tirée de Pope [61]

## 4.1 Les grandes familles de structures

La première formulation du concept de structure cohérente est due à Theodorsen [1] qui postula l'existence de structures en forme de fers à cheval, à partir des visualisations réalisées par Weste. La figure 6.4 propose une illustration de la structure proposée par Theodorsen ainsi que de son effet sur le champ de vitesse environnant. Les « structures de Theodorsen » sont des lacets de vorticité dessinant un arc ou une épingle à cheveux selon leur degré d'étirement et fortement inclinés (environ  $45^\circ$ ) dans la direction de l'écoulement. L'existence de ces structures a depuis été confirmée de manière expérimentale par un très grand nombre d'études dont un exemple est l'observation des écoulements de fumée réalisée par Bandyopadhyay [2]. La visualisation d'écoulements par injection de fumée à différents nombres de Reynolds en couche limite menée par Head et al. [63] montre qu'à haut nombre de Reynolds les structures de Theodorsen sont fortement étirées dans le sens de l'écoulement et ressemblent alors à des épingles à cheveux. A bas nombre de Reynolds, les structures de Theodorsen sont de hauteur et de largeur similaires car beaucoup moins étirées et ressemblent davantage à des arcs ou à des « fers à cheval ». Les structures de Theodorsen sont donc souvent identifiées comme étant de type « arc » ou «  pingle à cheveux » selon leur degré d'étirement. Par la suite, les structures en épingle à cheveux seront désignées par l'acronyme TEC (pour Tourbillons en épingle à cheveux).

Les TEC et les arcs sont prédominants dans la zone de recouvrement mais sont plutôt rares à proximité immédiate des parois où la turbulence est dominée par des structures filiformes allongées dans le sens de l'écoulement, appelées tourbillons quasi-longitudinaux (TQL). La figure 6.4 propose une vue d'ensemble des TEC, arcs et des TQL qui constituent l'essentiel des structures cohérentes identifiées à ce jour. L'analyse des simulations numériques de Spalart [65] en couche limite menée par Robinson [64] a permis d'évaluer la proportion des TEC à environ 9 % tandis que les TQL et les arcs représentent respectivement 30 et 40 % du nombre de structures identifiées. Il est important de souligner que le nombre de Reynolds maximal des simulations de Spalart est relativement réduit ( $Re_\theta = 1410$ ) et que la proportion des TEC par rapport aux arcs devrait être plus élevée pour les nombres de Reynolds supérieurs d'après Head et al. [63]. Enfin, les structures se répartissent différemment dans l'écoulement selon leur type. Les TQL sont prédominants   proximité de la paroi tandis que dans la couche de recouvrement, les TEC coexistent avec les structures en arc qui deviennent prépondérants dans la couche externe [64].

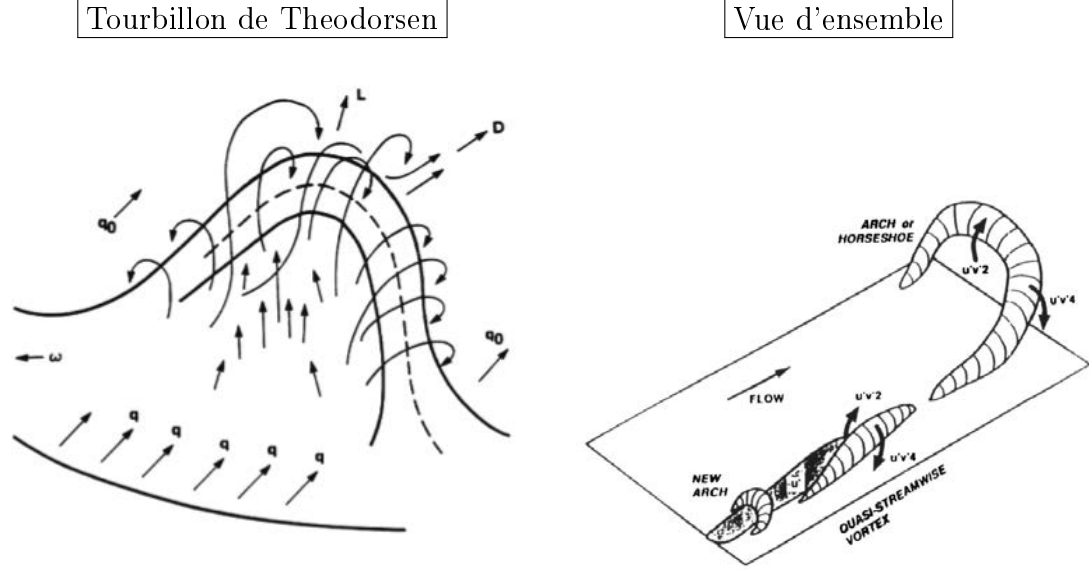


FIGURE 6.4 – Exemples de structures cohérentes tirés de Robison [64]. A gauche : Schéma conceptuel d'un tourbillon de Theodorsen, A droite : Vue d'ensemble sur les trois grands types de structures cohérentes (TQL, TEC et arcs)

Une des caractéristiques les plus remarquables des écoulements de paroi est l'alternance de stries de haute et basse vitesse longitudinale dans la couche interne à  $y^+ < 40$ , observée pour la première fois par Kline et al. [66]. Ces stries sont la conséquence cinématique directe du passage de TQL à proximité des parois. En effet, le mouvement tourbillonnaire induit par les TQL dans le plan  $(y, z)$  agit comme une pompe qui d'un côté fait descendre (balayage) des portions du fluide ayant une vitesse longitudinale plus élevée que la vitesse locale, et de l'autre fait remonter (éjection) des portions de fluide à basse vitesse, ce qui engendre des fluctuations négatives de la vitesse longitudinale. Ce processus est illustré dans la figure 6.5. La longueur des stries ainsi générées vaut environ 200 unités pariétales et est directement liée à la longueur des TQL associées. De même, la largeur des stries est directement liée à la distance entre les TQL dans la direction transverse et varie de 20 à  $80\delta_\nu$  pour les stries basse vitesse et de 40 à  $110\delta_\nu$  pour les stries haute vitesse, selon Robinson [64].

Enfin, il est important de souligner le rôle actif (au sens de Townsend [4]) des TQL dans la génération de l'énergie cinétique turbulente. En effet, les TQL génèrent des fluctuations positives de  $u'$  coté balayage ( $v' < 0$ ) et des fluctuations négatives de  $u'$  coté éjection où  $v' > 0$ . La contrainte de Reynolds  $-u'v'$  est négative dans les deux cas. Les TQL ont donc une contribution positive à la production  $\mathcal{P} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U^+}{\partial y^+}$

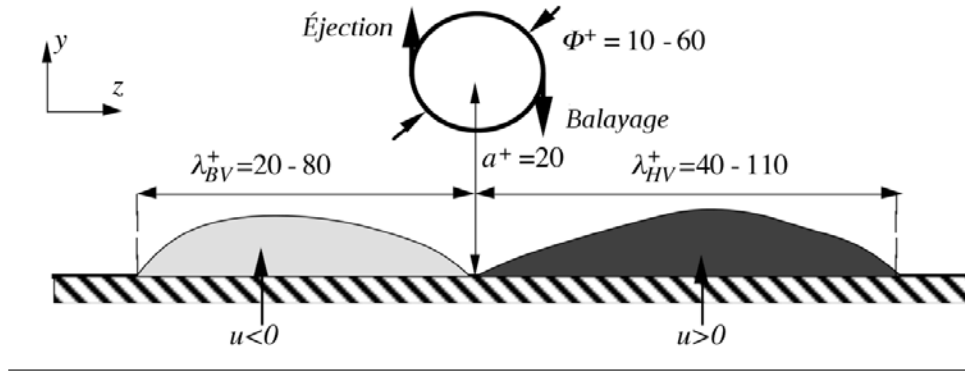


FIGURE 6.5 – Vue conceptuelle du mécanisme de génération des stries par les TQL tirée de Tardu [67]

de l'énergie turbulente.

## 4.2 Paquets de structures

Les visualisations d'écoulements par injection de fumée menées par Bandyopadhyay en 1980 [2] puis les visualisations plus récentes par VIP (Vélocimétrie par Images de Particules) réalisées par Adrian et al. [3] ont montré que la distribution des structures cohérentes dans l'écoulement n'était pas complètement aléatoire et que celles-ci pouvaient se regrouper en une succession de structures cohérentes. Ces groupes de structures, communément appelés « paquets » ou « grandes structures », ont été mis en évidence par Tardu et al. [68] par des mesures en un point. La réponse des paquets à des oscillations forcées de vitesse observée par Tardu et al. [69] fut un élément révélateur et plusieurs recherches sur le regroupement cohérent des structures ont par la suite été déclenchées.

La figure 6.6 tirée de [3] montre une coupe 2D d'un paquet composé d'une succession de trois structures de type TEC identifiées grâce leurs têtes. Les paquets de TEC observés en turbulence de paroi présentent des caractéristiques communes, analogues à celles du paquet de la figure 6.6. Tout d'abord, les structures sont ordonnées par taille croissante au sein d'un paquet, comme le montre la figure 6.6. La pente des paquets, donnée par la ligne reliant les têtes des TEC, est quasiment identique d'un paquet à l'autre et est approximativement de  $20^\circ$ , d'après les mesures de Brown et al. [70] et Head et al. [63] effectuées en couche limite turbulente. Enfin la distance moyenne séparant les têtes des TEC varie de 100 à 150 unités pariétales

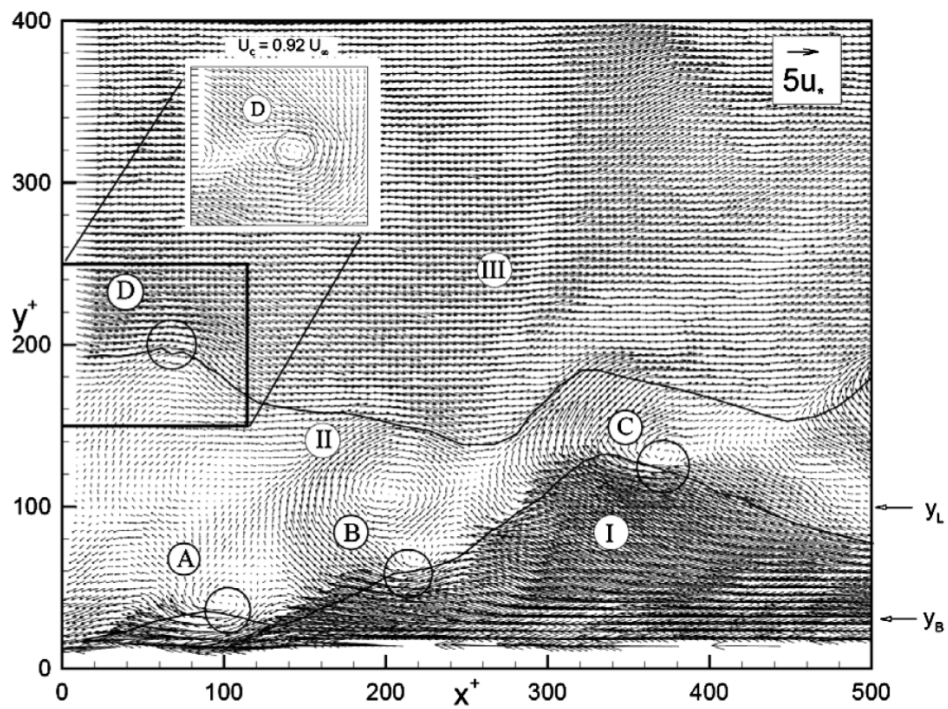


FIGURE 6.6 – Champ des fluctuations de vitesse à l'intérieur d'un paquet de structures obtenu par VIP dans un écoulement de couche limite à  $Re_\theta = 930$ . La figure est tirée d'Adrian et al. [3].

[71, 3], ce qui correspond aux distances de la figure 6.6.

Une des propriétés les plus importantes des grandes structures est la présence en leur sein d'une zone de vitesse déficitaire où le fluide se déplace plus lentement qu'à l'extérieur de la structure. Cette zone déficitaire est observable dans la figure 6.6 où le champ de vitesse fluctuant situé à l'intérieur du paquet est clairement orienté dans le sens opposé à l'écoulement et est beaucoup plus intense que le champ de vitesse extérieur. D'un point de vue dynamique, l'écoulement à l'intérieur d'une grande structure est ralenti par les effets individuels des structures TEC qui induisent à l'intérieur du paquet, un champ de vitesse contraire à l'écoulement moyen [3]. Les grandes structures, bien qu'entretenues par les structures cohérentes qui les composent, ont donc une existence propre et un effet dynamique notable sur l'écoulement.

D'un point de vue conceptuel, les grandes structures peuvent être représentées par des zones de vitesse déficitaire, comme illustré dans la figure 6.7 tirée de Adrian et al. [3], se déplaçant plus ou moins rapidement selon la vitesse déficitaire induite. Les gros paquets se déplacent plus rapidement, car le contre-courant induit par les structures est dilué sur une zone plus grande. A l'inverse, l'effet des structures cohérentes composant les paquets plus petits est plus concentré et ceux-ci se déplacent donc moins rapidement. Il est à noter que les jambes des TEC composant les grandes structures restent à proximité de la paroi tout au long de leur évolution tandis que leur corps est étiré par l'écoulement et s'allonge vers le centre du canal. Les grandes structures restent donc souvent collées aux parois et s'étendent, avec les TEC qui les composent, vers les zones externes de l'écoulement. Le lecteur intéressé par les détails de l'évolution des paquets de structures pourra se référer à l'étude numérique de Zhou et al. [72] qui décrit précisément l'évolution des structures TEC et propose un scénario détaillé de formation des grandes structures basé sur la génération de structures TEC secondaire et tertiaire à partir d'une structure TEC initiale.

Enfin, on notera que le champ de vitesse déficitaire du paquet de la figure 6.6, suffisamment loin des frontières (c'est à dire des tourbillons des têtes des TEC), est essentiellement unidirectionnel et donc non tourbillonnaire. Cette observation est conforme avec l'hypothèse de structures passives émise par Townsend [4] selon laquelle les structures d'échelle grande devant la distance  $y$  aux parois, n'influent pas sur la vitesse normale  $v$  et ont donc un effet minime sur la contrainte de Reynolds

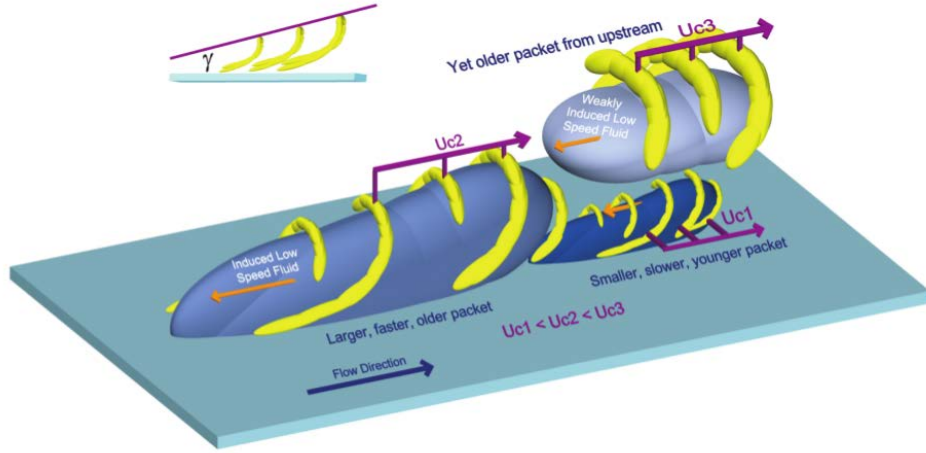


FIGURE 6.7 – Représentation 3D des paquets et des bulles de vitesse déficitaire associée tirée de Adrian et al. [3]

$-\overline{u'v'}$ . Ces structures ne contribuent donc pas à la production d'énergie turbulente et sont qualifiées de « passives » dans la terminologie de Townsend. Lorsque la distance  $y$  est comparable à la taille du paquet, l'effet tourbillonnaire induit en  $y$  par la tête des TEC est beaucoup plus fort et agit sur toutes les composantes de la vitesse. Le paquet influe donc sur la contrainte de Reynolds et est alors qualifié d'actif. Il convient cependant de noter que ces observations expérimentales sont postérieures aux hypothèses formulées par Townsend basées sur des arguments théoriques.

### 4.3 Modélisation des structures cohérentes

Le modèle des structures attachées formulé par Townsend en 1961 constitue le principal pilier sur lequel s'appuient l'essentiel des études théoriques sur la turbulence pariétale [73, 74, 75]. Ce modèle suppose l'existence de structures (délimitées par un lacet de vorticité) dont la taille et la distance aux parois sont similaires et qui sont donc considérées comme attachées aux parois. Les structures TEC vues précédemment constituent un exemple de structures réelles pouvant correspondre à cette description, leurs jambes étant situées à proximité des parois tandis que leur têtes s'étendent jusque dans la couche externe de l'écoulement. Il est important de souligner que la démarche suivie par Townsend ne présume pas de la forme de ces structures qui devra être déterminée de façon à pouvoir expliquer les caractéristiques de la turbulence. Le modèle des structures attachées offre un cadre théorique



simple et relativement puissant et a remporté d'importants succès, notamment dans la description de la vitesse moyenne et de l'intensité turbulente dans la couche de recouvrement.

### Influence des structures attachées

On considère dans un premier temps, une structure attachée dont le centre est situé en  $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$ . La fluctuation de vitesse induite par la structure en un point  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  de l'écoulement peut alors s'écrire :

$$u'_i(\mathbf{x}) = u_0 f_i((\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)/y_s) \quad (6.19)$$

où  $u_0$  est l'échelle de vitesse associée à l'écoulement induit par la structure. La fonction  $f_i$  peut être vue comme une fonction d'influence qui décroît avec la distance à la structure.

Le modèle de Townsend considère une distribution aléatoire de structures de tailles variées dans le plan  $(x, z)$ . L'effet induit par l'ensemble des structures est alors simplement déterminé par la somme des contributions individuelles de chaque structure attachée. La contribution  $C_{ij}$  de l'ensemble des structures à la contrainte  $u'_i u'_j$  s'exprime alors par :

$$C_{ij}(y) = \int \int P(u_0, \mathbf{x}_s) u_0^2 f_i\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s}{y_s}\right) f_j\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s}{y_s}\right) du_0 d\mathbf{x}_s \quad (6.20)$$

$$= \int_{l_0}^{L_0} N(y_s) I_{ij}(y/y_s) \frac{dy_s}{y} \quad (6.21)$$

La fonction  $P$  définit la probabilité des structures selon la position de leur centre et est invariante dans les directions  $x$  et  $z$  en raison de l'homogénéité de l'écoulement des ces directions. Les bornes  $l_0$  et  $L_0$  correspondent respectivement aux tailles des plus petites et des plus grandes structures considérées. La fonction  $I_{ij}$  correspond à l'influence totale d'une structure dans le plan  $(x, z)$  et s'écrit :

$$I_{ij}(y/y_s) = \int \int_0^\infty f_i\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s}{y_s}\right) f_j\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s}{y_s}\right) dx^* dz^* \quad (6.22)$$

La notation  $l^*$  représente la longueur  $l$  normalisée par  $y_s$ ,  $l^* = l/y_s$ . La fonction  $N(y_s)$  est analogue au facteur  $u_0$  dans l'expression de la contribution individuelle et

peut être interprétée comme l'intensité moyenne des structures :

$$N(y_s) = \int_0^\infty u_0^2 y_s^3 P(u_0, \mathbf{x}_s) du_0 \quad (6.23)$$

L'allure exacte des fonctions  $I_{ij}$  est naturellement en grande partie inconnue mais peut être approximée à partir de notre connaissance des propriétés de l'écoulement. Tout d'abord, à proximité des parois,  $y/y_s \ll 1$  et les fonctions  $f_i$  peuvent être approximées par un développement limité au premier ordre qui se réduit à  $f_2(y) = y$  dans le cas de la composante normale  $v$  de la vitesse du fait de la condition d'imperméabilité (vitesse normale nulle aux parois). La fonction d'influence totale  $I_{22}$  varie donc en  $y^2$  à proximité des parois. Les fonctions d'influence pour les fluctuations  $u'$  et  $w'$  peuvent être non nulles, dans l'hypothèse de structures non-visqueuses considérée par Townsend. Le comportement des fonctions  $I_{ij}$  en  $y \ll y_s$  est donc défini par :

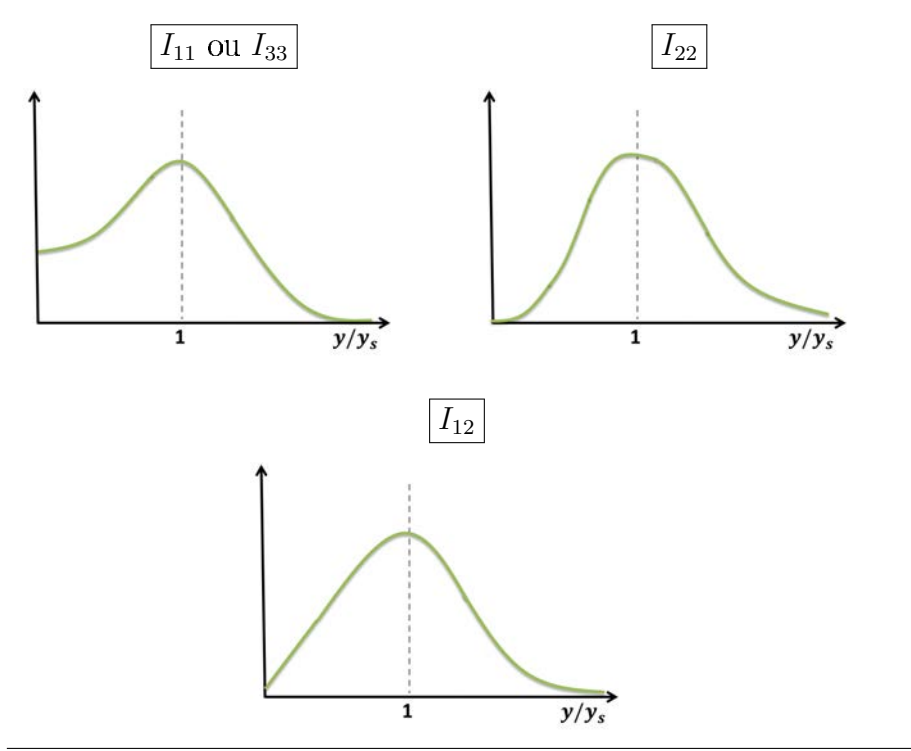
$$\begin{aligned} I_{12} &\propto y^* \\ I_{22} &\propto y^{*2} \\ I_{11}, I_{33} &\neq 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Par ailleurs, on peut supposer que l'effet ressenti est maximal à une distance  $y$  proche de la position  $y_s$  du centre de la structure  $y^* = y/y_s \approx 1$  et décroît significativement au-delà pour  $y^* \gg 1$ . Ces hypothèses mises bout à bout permettent de dresser un portrait robot des fonctions  $I_{ij}$  envisageables, tel que montré dans la figure 6.8.

### Structures attachées et loi logarithmique

On reprend ici l'approche de Townsend [4] qui permet de déterminer le comportement des fluctuations de vitesse dans la couche de recouvrement en considérant le comportement asymptotique de la relation 6.21 lorsque  $l_0 \ll y \ll L_0$ . À la différence des fonctions  $I_{11}/y^*$  et  $I_{33}/y^*$ , les fonctions  $I_{12}/y^*$  et  $I_{22}/y^*$  tendent vers une valeur finie lorsque  $y^* \rightarrow 0$  et ne présentent aucune singularité. Les intégrales :

$$\mathcal{I}_{12} = \int_{l_0}^{L_0} I_{12}(y/y_s) \frac{dy_s}{y} = \int_{y/L_0}^{y/l_0} I_{12}(y^*) \frac{dy^*}{y^*}$$


 FIGURE 6.8 – Exemples de fonctions  $I_{ij}$  envisageables

et

$$\mathcal{I}_{22} = \int_{l_0}^{L_0} I_{22}(y/y_s) \frac{dy_s}{y} = \int_{y/L_0}^{y/l_0} I_{22}(y^*) \frac{dy^*}{y^*}$$

convergent donc vers une limite finie lorsque  $y/L_0 \rightarrow 0$  et  $y/l_0 \rightarrow \infty$ , et sont par conséquent indépendantes de  $y$ . On peut alors remarquer que le cas d'une fonction  $N(y_s) = N = \text{cste}$  constante correspond à des contraintes  $C_{12} = N\mathcal{I}_{12}$  et  $C_{22} = N\mathcal{I}_{22}$  également constantes et permet de retrouver l'hypothèse de contrainte  $\overline{u'v'}$  constante de la loi logarithmique.

Les contraintes  $C_{11}$  et  $C_{33}$  peuvent être obtenues en séparant les portions de  $I_{ij}$  situées dans ( $y^* < y_0^*$ ) et en dehors ( $y^* > y_0^*$ ) du domaine de validité des relations 6.24 :

$$C_{ij} = C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)} = N \int_{y/L_0}^{y_0^*} I_{ij}(y^*) \frac{dy^*}{y^*} + N \int_{y_0^*}^{y/l_0} I_{ij}(y^*) \frac{dy^*}{y^*}$$

La borne  $y_0^*$  exprimée dans les échelles des structures ne dépend pas de la distance  $y$  à la paroi et le terme  $C_{ij}^{(2)}$  est donc constant. L'utilisation des relations 6.24 sur  $C_{11}^{(1)}$  et  $C_{33}^{(1)}$  conduit à une loi logarithmique pour les contraintes  $\overline{u'u'}$  et  $\overline{w'w'}$ . Les différentes contraintes de Reynolds sont finalement données par :

$$\begin{aligned}
 \overline{u'^2} &= -A_{11} \ln\left(\frac{y}{L_0}\right) + B_{11} \\
 \overline{v'^2} &= B_{22} \\
 \overline{u'v'} &= B_{12} \\
 \overline{w'^2} &= -A_{33} \ln\left(\frac{y}{L_0}\right) + B_{33}
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

La valeur des constantes  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  dépend de la forme exacte des structures attachées. Comme mentionné précédemment, l'approche de Townsend est basée sur l'hypothèse d'une superposition de structures attachées, réparties aléatoirement dans les directions homogènes  $x$  et  $z$ . Or, cette hypothèse n'est pas compatible avec la présence de paquets de structures, dans lesquels les structures se répartissent de manière ordonnée, dont l'existence n'était pas encore connue à l'époque. Par la suite, la notion de paquets a été formalisée et intégrée au modèle des structures attachées à travers le concept de hiérarchie de structures introduit par Perry et al. [73] et illustré dans la figure 6.9. Les structures se regroupent alors dans des hiérarchies dont l'échelle est déterminée par la taille de la plus grande structure. Il est important de souligner que l'introduction de la notion de hiérarchie dans le modèle des structures attachées ne modifie pas les relations 6.25 sur les fluctuations de vitesse qui sont également proposées par Perry dans son étude [73]. Enfin, les relations logarithmiques prédites par le modèle des structures attachées semblent conformes avec les résultats expérimentaux obtenus sur des écoulements à grands nombres de Reynolds présentés dans la figure 6.10. Il convient cependant de souligner que l'accord apparent avec une loi logarithmique est souvent trompeur, une loi de puissance pouvant également produire des profils similaires, comme le montre la figure 6.3.

### Notion de structures actives et passives

L'étude rapide des relations 6.24 peut fournir des informations intéressantes sur l'effet d'une structure sur les différentes composantes de la vitesse en fonction de sa taille. Les structures de grande taille devant la position  $y$  considérée ( $y/y_s \ll 1$ ) contribuent essentiellement aux fluctuations  $u'$  et  $w'$  et n'affectent pas la contrainte de Reynolds. En effet, dans le cas  $y/y_s \ll 1$ , les fluctuations de vitesse normale  $v'$  et la contrainte de Reynolds  $u'v'$  sont très faibles et augmentent selon  $(y/y_s)$ . On peut donc considérer que les structures de grande taille devant  $y$  contribuent

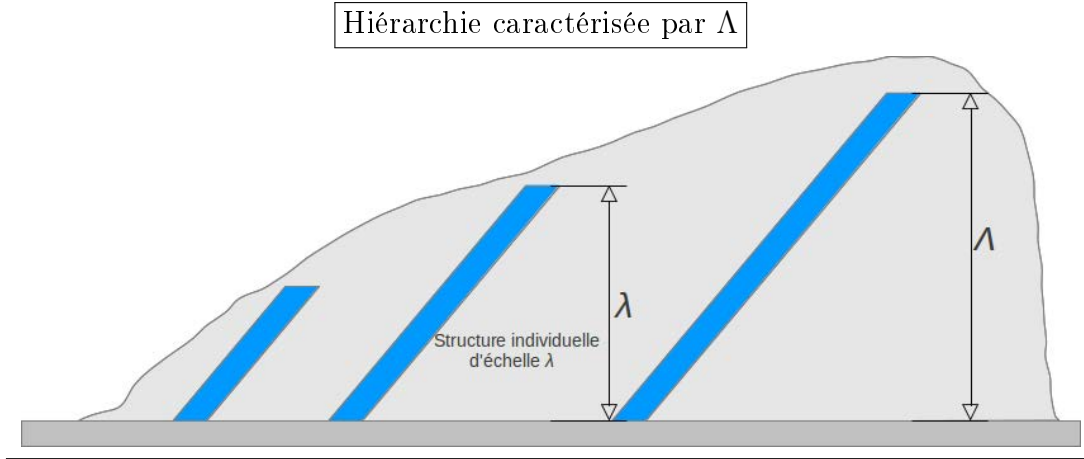


FIGURE 6.9 – Illustration du concept de hiérarchie proposée par Perry et al. [73]

de manière marginale à la vitesse normale et à la contrainte de Reynolds  $\overline{u'v'}$ . En revanche, les fluctuations induites sur les composantes longitudinale et transverse ne sont pas nulles et augmentent de manière linéaire. Les structures de grande taille contribuent donc pas à la production d'énergie turbulente donnée par  $\mathcal{P} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$  et sont donc qualifiées de passives dans la terminologie de Townsend.

Pour les structures « locales » de taille comparable à la position  $y$  ( $y \approx y_s$ ), les relations 6.24 ne sont évidemment plus valables, mais on peut a priori considérer que les tourbillons (tournant dans le plan  $x - y$ ) délimitant les structures attachées ont une influence non négligeable sur la composante normale de la vitesse ainsi que sur la contrainte de Reynolds, comme le suggère l'allure des courbes présentées dans la figure 6.8. Les structures locales contribuent donc à l'ensemble des fluctuations de vitesse et sont qualifiées d'actives du fait de leur rôle dans la production d'énergie turbulente.

Cela nous amène à insister sur le fait que les structures attachées locales et actives ont un effet tourbillonnaire au point  $y$  considéré, à la différence des structures passives. En effet, dans le cas de ces dernières, le point  $y$  est beaucoup plus éloigné des tourbillons délimitant les structures et l'effet tourbillonnaire est beaucoup moins marqué. Les structures passives sont donc considérées comme irrotationnelles. Cette caractérisation en structures passives irrotationnelles et structures actives tourbillonnaires est confortée par l'analyse du champ vectoriel présenté dans la figure 6.6 montrant un paquet de structure, qui est clairement irrotationnel dans les zones éloignées des têtes des structures TEC.

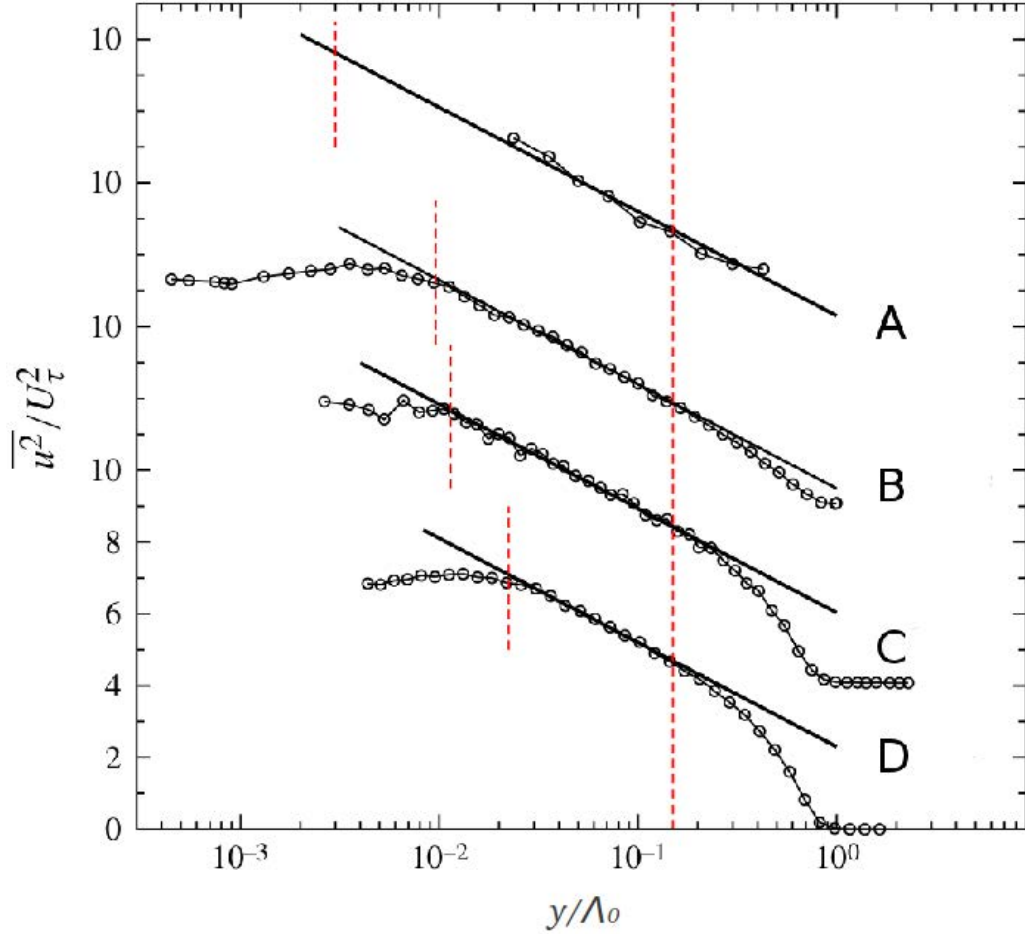


FIGURE 6.10 – Profils de la contrainte  $\overline{u'^2}/u_\tau^2$  pour différents nombres de Reynolds. (A) :  $Re_\tau = 628000$ , (B) :  $Re_\tau = 98190$ , (C) :  $Re_\tau = 68780$ , (D) :  $Re_\tau = 18010$ . Les lignes verticales délimitent la zone  $3\sqrt{Re_\tau} < y^+ < 0.15Re_\tau$  correspondant à la couche de recouvrement. Les différentes expériences ont été réalisées sur différents types d'écoulements de paroi, le paramètre  $\Lambda_0$  représente l'échelle de longueur externe. Le détail des expériences est donné dans l'article de Marusic et al. [76]

La séparation entre structures actives et passives, ne contribuant pas à la contrainte de Reynolds, a récemment été exploitée par Panton [75] afin d'évaluer la dépendance du pic des fluctuations de vitesse en fonction du nombre de Reynolds. On notera que les pics de  $\overline{u'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  surviennent avant la couche de recouvrement et que leur existence n'est donc pas incompatible avec les lois logarithmiques prédites par Townsend et Perry [4, 73] valables uniquement dans la couche de recouvrement. L'étude de Panton [75] propose de décomposer les fluctuations de vitesse longitudinale  $u' = u'_A + u'_P$  en une composante active  $u'_A$  et une composante passive  $u'_P$  obéissant chacune à des jeux d'échelles différents. Les développements effectués sont relativement complexes et font intervenir des considérations théoriques et empiriques qui peuvent difficilement être présentées de manière succincte. On se contentera ici de donner la loi de dépendance logarithmique entre l'intensité du pic de  $\overline{u'^2}$  et le nombre de Reynolds de friction alors obtenue :

$$\overline{u'^2} = 0.95 \ln(Re_\tau) + 1.710 \quad (6.26)$$

Cette loi logarithmique présente une pente quasiment similaire avec la loi logarithmique  $\overline{u'^2} = 0.965 \ln(Re_\tau) + 1.036$  pouvant être extrapolée à partir des résultats expérimentaux couvrant une large gamme de nombres de Reynolds et sera également comparée à nos résultats de simulation présentés dans le prochain chapitre.

# Chapitre 7

## Effets du nombre de Reynolds sur le champ de vitesse

### 1 Introduction

Une des qualités premières de la simulation numérique directe par rapport à l'expérimentation tient dans la très grande précision des résultats obtenus qui permet de produire des statistiques fiables et précises de quantités difficilement mesurables expérimentalement comme, par exemple, la dissipation ou la vorticité. Les simulations numériques se sont par ailleurs montrées capables de reproduire avec précision les résultats expérimentaux et se sont progressivement imposées comme une alternative crédible aux expérimentations [5].

Les développements théoriques sur la turbulence de paroi présentés dans le chapitre précédent sont basés sur des considérations asymptotiques et ne peuvent être rigoureusement appliqués uniquement à des écoulements à grands nombres de Reynolds, encore inaccessibles à la simulation. Cependant, l'augmentation continue de la puissance de calcul a permis d'étendre considérablement la portée des simulations numériques et d'envisager l'étude d'écoulements autrefois réservés à l'expérimentation. La période qui s'ouvre actuellement est une période charnière au sens où les nombres de Reynolds atteints ne rentrent pas dans les conditions idéales de validité des modèles théoriques mais sont néanmoins suffisants pour en observer les premiers effets.

La campagne de simulations conduite au cours de cette thèse a permis de réaliser quatre grandes simulations à  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$  et constitue actuellement la plus grande base nationale de simulation numérique directe d'écoulement en canal. La première base mondiale a été produite l'équipe de Jimenez [38] qui est parvenue



à atteindre  $Re_\tau = 2003$ . Les résultats à  $Re_\tau = 1100$  obtenus sont cependant amplement suffisants pour observer les effets des grandes structures sur les statistiques de l'écoulement. Ce chapitre se propose d'étudier l'effet du nombre de Reynolds sur les statistiques des champs de vitesse. L'objectif sera de déterminer l'influence des différentes échelles sur les statistiques et de discuter la conformité des effets identifiés avec la description actuelle des grandes structures de l'écoulement.

## 2 Conduite des simulations

L'écoulement simulé est un écoulement en canal de parois d'extension infinie dans les directions  $x$  et  $z$ . Le caractère non borné du domaine de calcul dans ces directions est modélisé par l'utilisation de condition périodiques aux limites du domaine tandis qu'une condition d'adhérence est utilisée pour modéliser l'action des parois. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées en espace selon les schémas explicites optimisés présentés précédemment et avancées temporellement selon le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 proposé par Spalart [32]. Il est à noter que la résolution de l'équation de Poisson est réalisée dans l'espace de Fourier dans les directions homogènes  $x$  et  $z$  et dans l'espace physique dans la direction  $y$ , le solveur de Poisson purement spectral (présenté dans la section 2 du chapitre 5) ayant été développé ultérieurement.

### 2.1 Simulations effectuées

Comme mentionné précédemment, les simulations ont été réalisées sur le supercalculateur Turing mis à notre disposition par l'IDRIS (Institut de Développement et de Ressources Informatiques Scientifiques). Le caractère massivement parallèle de cette architecture ainsi que la quantité d'heures de calcul octroyé par l'IDRIS nous a permis d'atteindre un nombre de Reynolds ( $Re_\tau = 1100$ ) proches des plus grands nombres de Reynolds atteints dans la littérature [36, 38]. Cette simulation a nécessité près de 10 millions d'heures de calcul (en temps CPU) étalées sur six mois de calcul et a généré environ 2 To de données brutes. Trois autres simulations à nombre de Reynolds plus faibles ( $Re_\tau = 180, 395$  et  $590$ ) ont été réalisées afin de pouvoir étudier l'évolution des statistiques en fonction du nombre de Reynolds. L'ensemble de ces simulations couvrent une gamme suffisamment large de nombre de Reynolds pour permettre une étude approfondie des effets des grandes structures sur les statistiques de l'écoulement, comme nous le verrons tout au long de ce chapitre.

Le tableau 7.1 résume les principaux paramètres des simulations. Le nombre CFL de chaque simulation est relativement réduit au regard de la méthode d'avancement temporel RK3 utilisée et est inférieur aux nombres CFL maximum suggérés par l'analyse des propriétés DRP effectuée précédemment (section 3.2 du chapitre 4). Le domaine de calcul est relativement étendu dans les directions  $x$  et  $z$  de façon à pouvoir capturer l'ensemble des structures de l'écoulement dont les plus grandes peuvent s'étendre sur près de 20 fois la demi hauteur du canal [77]. La taille du domaine est similaire à celle utilisée dans les simulations numériques à  $Re_\tau = 2003$  réalisées par Hoyas et al. [38]. La résolution des grilles de calcul a été calculée de façon à obtenir des tailles de mailles  $\Delta x^+ \approx 9$  et  $\Delta z^+ \approx 5$  dans les directions  $x$  et  $z$ . Dans la direction  $y$ , le maillage est raffiné à proximité des parois ( $\Delta y_{min}^+ \approx 0.5$ ) puis relaxé vers le centre du canal ( $\Delta y_{max}^+ \approx 5.6$ ) par l'application de la transformation proposée par Orlandi (section 2.2.1 du chapitre 3). Ces tailles sont similaires à celles utilisées dans les simulations numériques présentées dans la littérature [36, 38].

$Re_\tau$	Résolution ( $N_x \times N_y \times N_z$ )	$\Delta x^+$	$\Delta y_{min}^+$ $\Delta y_{max}^+$	$\Delta z^+$	$L_x/h$	$L_z/h$	$CFL$
180	(771 $\times$ 129 $\times$ 387)	8.80	0.48(0.31 $\eta$ ) 5.59(1.53 $\eta$ )	5.84	$12\pi$	$4\pi$	0.62
395	(1691 $\times$ 283 $\times$ 849)	8.81	0.48(0.33 $\eta$ ) 5.57(1.26 $\eta$ )	5.85	$12\pi$	$4\pi$	0.68
590	(1651 $\times$ 423 $\times$ 1113)	8.98	0.48(0.34 $\eta$ ) 5.56(1.15 $\eta$ )	5.00	$8\pi$	$3\pi$	0.86
1100	(3079 $\times$ 789 $\times$ 2075)	8.98	0.48(0.34 $\eta$ ) 5.55(0.98 $\eta$ )	5.00	$8\pi$	$3\pi$	0.91

TABLE 7.1 – Paramètres des simulations. Les valeurs  $\Delta y_{min}^+$  et  $\Delta y_{max}^+$  correspondent respectivement à la taille des mailles dans la direction  $y$  aux parois et au centre du canal, également exprimées dans les échelles de Kolmogorov (valeurs entre parenthèses)

## 2.2 Étapes de transition et d'acquisition

Les simulations comportent deux grandes étapes : une étape de transition vers l'état turbulent et une étape « d'acquisition » des statistiques pendant laquelle la simulation est poursuivie jusqu'à l'obtention d'au moins 10 champs indépendants de façon à garantir la convergence des statistiques.

La phase de transition consiste à provoquer la transition d'un écoulement laminaire de Poiseuille vers l'état turbulent en appliquant un soufflage aux parois. La

durée de cette phase est d'environ  $200 \frac{h}{U_{cp}}$  (où  $U_{cp}$  est la vitesse au centre du profil de Poiseuille) et correspond à un tiers des itérations totales d'une simulation. Afin de réduire au maximum le temps de calcul, la phase de transition est réalisée sur une grille grossière (GTr) dont la résolution est divisée par deux dans chaque direction par rapport à la grille utilisée pour le reste de la simulation ( $N_x^{(GTr)} = (N_x + 1)/2$ ,  $N_y^{(GTr)} = (N_y + 1)/2$  et  $N_z^{(GTr)} = (N_z + 1)/2$ ). Cette stratégie permet d'obtenir une très bonne approximation du champ turbulent pleinement développé tout en divisant par 8 le temps de calcul de la phase de transition. On rappelle en effet que l'utilisation de schémas explicites optimisés permet d'obtenir des résultats très satisfaisants y compris sur des grilles grossières au regard des grilles traditionnellement utilisées, comme montré dans le chapitre 4. On notera par ailleurs, que le filtrage explicite optimisé décrit précédemment est appliqué toutes les 100 itérations afin de réduire les effets de l'aliasing inhérents à l'utilisation de grilles grossières. Les champs de vitesse grossiers obtenus à l'issue de la phase de transition sont finalement analysés afin de s'assurer du caractère établi de l'écoulement généré.

La phase d'acquisition est initialisée par projection du dernier champ de vitesse grossier généré lors de la phase de transition sur la grille classique et se poursuit jusqu'à l'obtention d'au moins 10 champs statistiquement indépendants de façon à garantir une bonne convergence des statistiques de l'écoulement. On considère généralement que deux champs successifs sont statistiquement indépendants lorsqu'ils sont séparés par le temps de parcours ( $T_p = \frac{L_x}{U_c}$ ) de la longueur du canal par une portion de fluide située au centre du canal. La durée total de la phase d'acquisition est donc au minimum  $T_{Acq} = 10 \frac{L_x}{U_c}$ . Le tableau 7.2 donne, pour chaque simulation, la durée de la phase d'acquisition  $T_{Acq}$  en fonction du temps de parcours  $T_p$  ainsi que le nombre de champs utilisés pour le calcul des statistiques d'une simulation.

	180	395	590	1100
$T_{Acq}$	$16.99T_p$	$10.13T_p$	$10.00T_p$	$10.49T_p$
Nombre de champs	64	51	12	11

TABLE 7.2 – Durée de la phase d'acquisition, exprimée en fonction de  $T_p = \frac{L_x}{U_c}$ , pour les différentes simulations. Le nombre de champs de vitesse 3D utilisés pour le calcul des statistiques est également indiqué.

### 3 Vitesse moyenne

#### 3.1 Profil global

La figure 7.1 montre le profil de vitesse moyenne exprimé dans les échelles internes. On notera tout d'abord qu'à proximité immédiate des parois, dans la sous-couche visqueuse, les profils de vitesse se confondent et obéissent à la loi linéaire  $U^+ = y^+$  énoncée dans le chapitre précédent. L'indépendance des profils dans la couche visqueuse montre que le champ de vitesse moyen dans cette zone est uniquement gouverné par les échelles visqueuses et n'est clairement pas affecté par les échelles externes. On rappelle que la loi linéaire est un résultat théorique connu qui peut être facilement déduit de l'équation de contrainte totale (Eq. 6.14) exprimée en unité pariétales en éliminant la contrainte de Reynolds, négligeable dans cette zone.

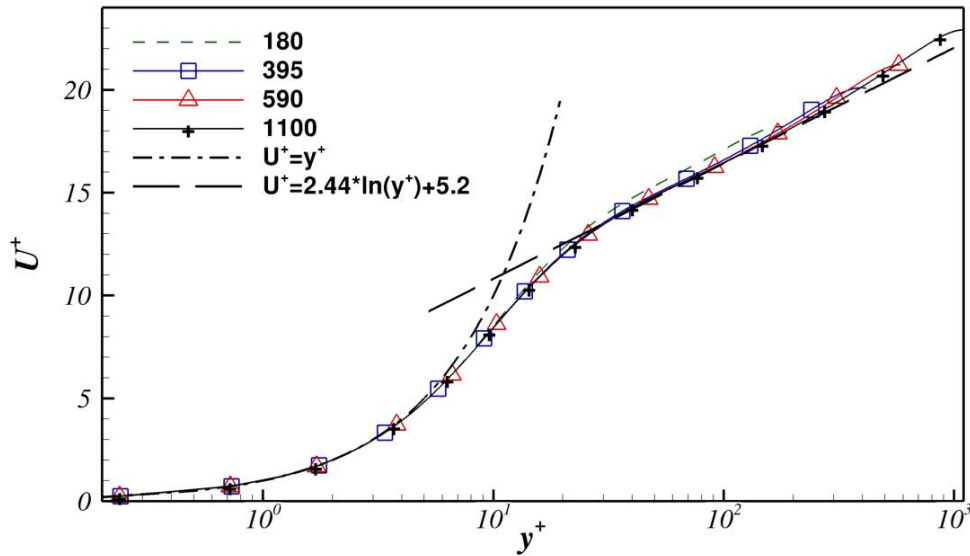


FIGURE 7.1 – Profils de vitesse moyenne exprimée dans les échelles internes

#### 3.2 Vitesse moyenne dans la couche de recouvrement

Dans la couche de recouvrement, la vitesse moyenne semble relativement bien décrite par la loi logarithmique  $U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$  présentée dans le chapitre précédent. Cependant, la loi logarithmique est fondée sur l'hypothèse, souvent remise en

cause dans la littérature, que l'écoulement moyen est insensible aux effets visqueux dans la couche de recouvrement. La loi de puissance, qui fournit des résultats similaires tout en étant basée sur des hypothèses moins restrictives, est également une bonne candidate pour la description de la vitesse moyenne dans la couche de recouvrement. A ce jour, la question de la conformité des profils de vitesse moyenne avec une loi logarithmique ou de puissance n'est pas tranchée, les deux lois fournissant des résultats très proches, situés dans la marge autorisée par la dispersion des résultats expérimentaux. On se propose ici d'étudier la conformité des résultats de simulation numérique obtenus avec la loi logarithmique et avec la loi de puissance par l'utilisation de fonctions de diagnostic.

### Conformité avec une loi logarithmique

La figure 7.2 montre la fonction de diagnostic  $F_{log} = y^+ \frac{dU^+}{dy^+}$  qui permet d'évaluer le  $\frac{1}{\kappa}$  effectif du profil de vitesse. On remarque que la fonction  $F_{log}$  n'est quasiment jamais constante et que le  $\kappa$  effectif dépend donc de  $y^+$  quelque soit le nombre de Reynolds considéré. Les profils de vitesse obtenus ne sont donc pas compatibles avec la formulation classique de la loi logarithmique.

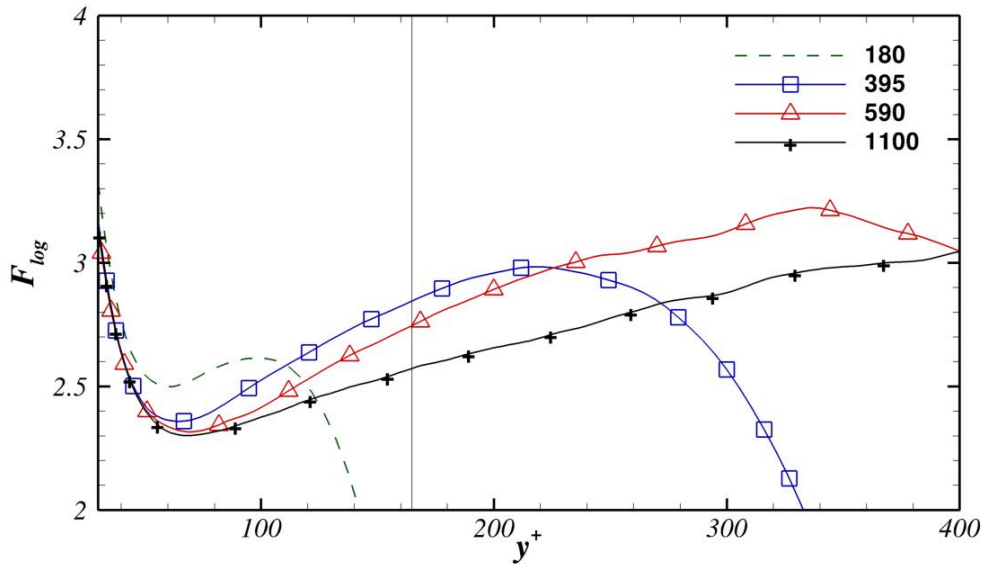


FIGURE 7.2 – Profils de la fonction de diagnostic de la vitesse moyenne avec la loi logarithmique  $F_{log} = y^+ \frac{dU^+}{dy^+}$ . La ligne verticale représente la limite supérieure de la couche de recouvrement pour la simulation à  $Re_\tau = 1100$ .

La loi logarithmique a été récemment revisitée par Wosnik et al. [58] et étendue

à des nombres de Reynolds modérés à travers une approche dite « presque asymptotique ». Cette nouvelle loi logarithmique comporte une dépendance des paramètres  $\kappa$  et  $B$  avec le nombre de Reynolds mais converge vers la loi logarithmique classique lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini. L'étude de Wosnik et al. (2000) propose par ailleurs de séparer la zone de recouvrement en une méso-couche dans laquelle la vitesse moyenne obéirait à une loi logarithmique « décalée »

$$U^+(y^+, h^+) = \frac{1}{\kappa(h^+)} \ln(y^+ + 8) + B(h^+)$$

et une couche inertielle située au delà de  $y^+ = 300$  dans laquelle le profil de vitesse serait régi par la loi logarithmique non décalée :

$$U^+(y^+, h^+) = \frac{1}{\kappa(h^+)} \ln(y^+) + B(h^+)$$

La figure 7.3 montre la fonction de diagnostic  $F_{log+8} = (y^+ + 8) \frac{dU^+}{dy^+}$  pour la loi logarithmique décalée. La pente de la courbe dans la zone de recouvrement est nettement plus réduite que pour la loi logarithmique classique mais reste cependant significative. Les résultats présentés ici ne permettent donc pas de valider la pertinence de l'approche logarithmique pour les nombres de Reynolds considérés ici.

Il est à noter que selon Wosnik et al. [58], la fonction  $\Phi(y^+, h^+)$  de l'équation 6.15 peut s'écrire comme :

$$\Phi(y^+, h^+) = \frac{1}{\kappa(h^+)} + S_i(y^+)U^+ + S_o(y^*)U_o^+$$

Avec

$$S_i = \frac{U^+(y^+, h^+ + \Delta h^+) - U^+(y^+, h^+)}{\Delta \ln(h^+)U^+}$$

$$S_o = \frac{U_o^+(y^*, h^+ + \Delta h^+) - U_o^+(y^*, h^+)}{\Delta \ln(h^+)U_o^+}$$

et  $U_o^+ = U^+ - U_c^+$ .  $S_o$  et  $S_i$  peuvent être interprétés comme la sensibilité des profils de vitesse exprimés dans les échelles internes et externes à une variation du nombre de Reynolds. La loi logarithmique proposée par Wosnik et al. [58] est basée sur l'hypothèse qu'à un nombre de Reynolds suffisamment grand, les produits  $S_o U_o^+$  et  $S_i U^+$  deviennent négligeables devant  $\frac{1}{\kappa}$ . Un calcul effectué à partir des cas  $Re_\tau = 590$  et  $Re_\tau = 1100$  montre que le produit  $S_o U_o^+$  en  $y^* = 0.1$  (donc dans la zone de recouvrement) vaut approximativement 0.4 et n'est donc clairement pas négligeable devant  $\frac{1}{\kappa}$  (approximativement 2.4). Il n'est donc pas surprenant que la loi logarithmique pro-

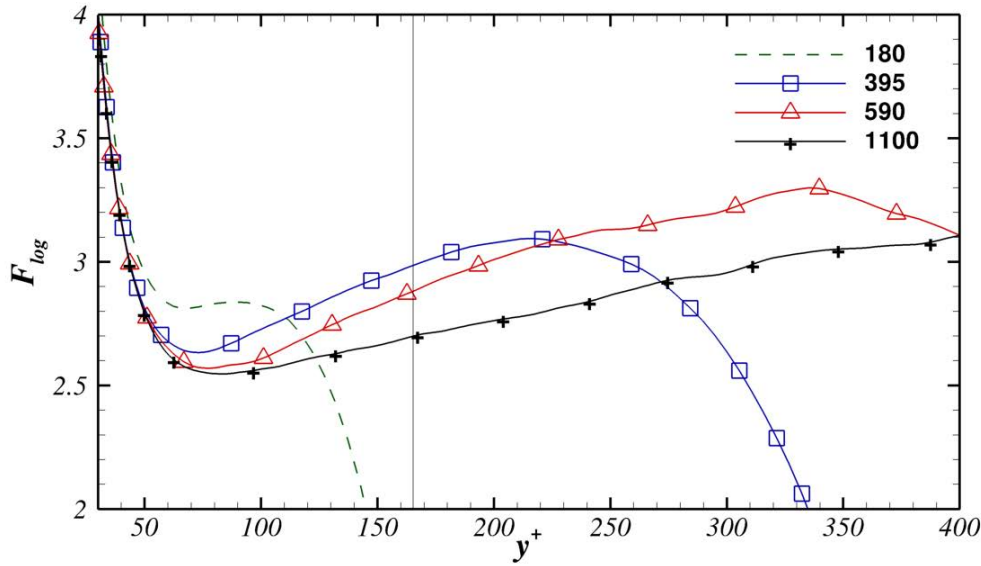


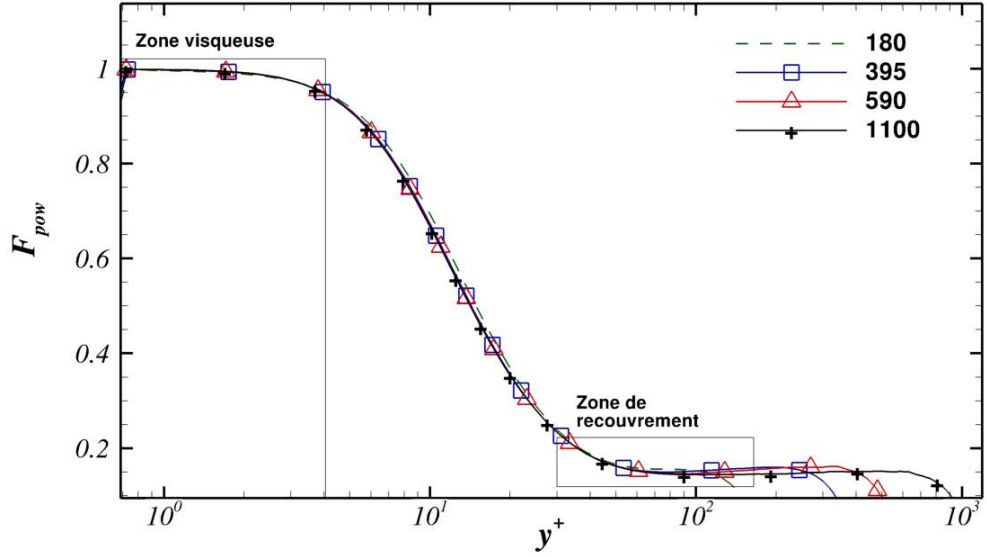
FIGURE 7.3 – Profils de la fonction de diagnostic  $F_{log+8} = (y^+ + 8) \frac{dU^+}{dy^+}$  de la vitesse moyenne avec la loi logarithmique décalée proposée par Wosnik et al. [58]. La ligne verticale représente la limite supérieure de la couche de recouvrement pour la simulation à  $Re_\tau = 1100$ .

posée par Wosnik et al. [58] ne soit pas respectée, ses conditions de validité n'étant pas réunies aux nombres de Reynolds considérés.

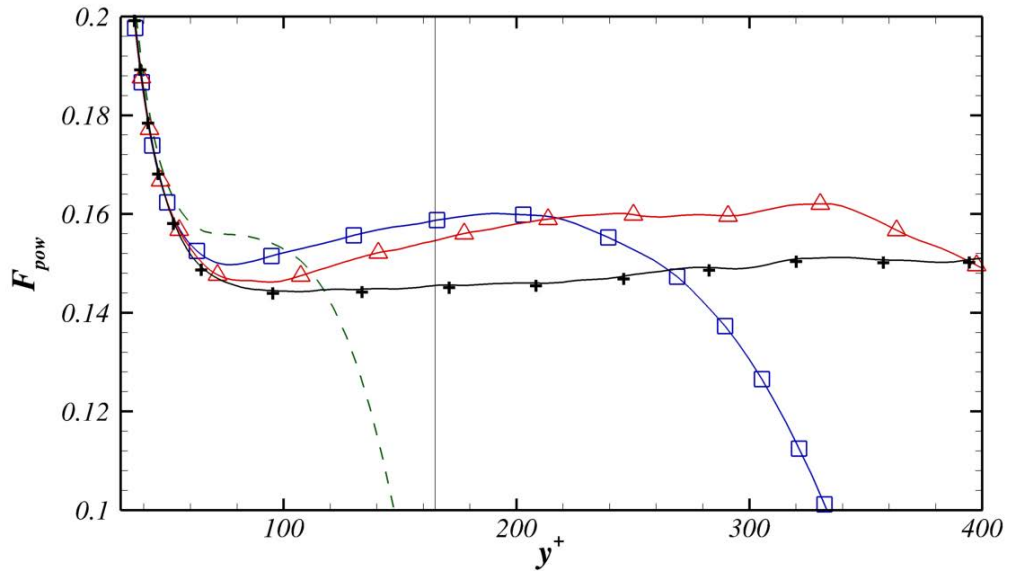
### Conformité avec la loi de puissance

La figure 7.4 montre la fonction de diagnostic  $F_{pow} = \frac{y^+}{U^+} \frac{dU^+}{dy^+}$  qui donne la puissance  $\alpha$  effective correspondant à la vitesse moyenne. Il est intéressant de vérifier que la puissance effective obtenue à proximité immédiate des parois est constante et très proche de 1 ce qui confirme la loi linéaire  $U^+ = y^+$  dans la couche visqueuse. Dans le cas  $Re_\tau = 1100$ , le profil de vitesse moyenne présente une puissance effective quasiment constante sur toute la zone de recouvrement (de  $y^+ = 80$  à  $y^+ = 165$ ) et est donc *a priori* conforme avec une loi de puissance.

L'erreur commise par les lois logarithmique et de puissance peut être estimée en considérant la variation des fonctions de diagnostic dans la zone de recouvrement, ces deux fonctions étant supposées rester constantes dans cette zone. Il est à noter que l'effet des variations de  $F_{log}$  et de  $F_{pow}$  sur le profil de vitesse moyenne  $U_{log}$  et  $U_{pow}$  donnés par les lois logarithmique et de puissance dépend de la sen-



(a) Vue globale



(b) Zoom sur la couche de recouvrement

FIGURE 7.4 – Profils de la fonction de diagnostic  $F_{pow} = \frac{y^+}{U^+} \frac{dU^+}{dy^+}$  de la vitesse moyenne avec une loi de puissance



sibilité  $S_{1/\kappa} = \frac{\partial U_{log}^+}{\partial (1/\kappa)}$  et  $S_\alpha = \frac{\partial U_{pow}^+}{\partial \alpha}$  de ces lois avec les paramètres  $(1/\kappa)$  et  $\alpha$ . La figure 7.5 montre le profil de  $F_{log}(y^+) - F_{log}(y^+ = 80)$  ainsi que le profil de  $(F_{pow}(y^+) - F_{pow}(y^+ = 80)) \frac{S_\alpha}{S_{1/\kappa}}$ . Les écarts à la loi de puissance sont multipliés par le rapport  $\frac{S_\alpha}{S_{1/\kappa}}$  afin d'être comparés aux écarts à la loi logarithmique. Le rapport  $\frac{S_\alpha}{S_{1/\kappa}}$  est environ égal à 2 dans la zone de recouvrement. Les écarts obtenus pour la loi logarithmique sont significatifs et largement supérieurs à ceux constatés pour la loi de puissance.

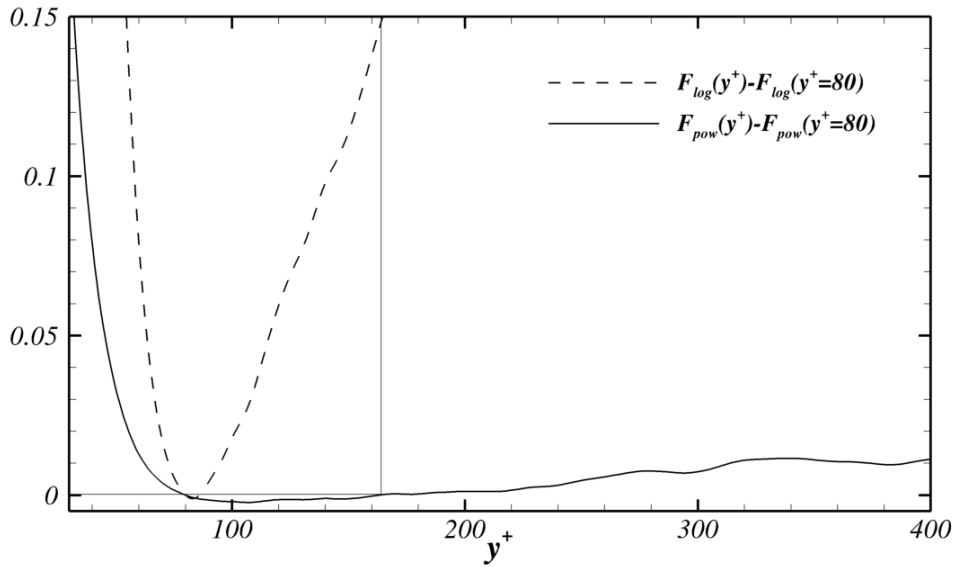


FIGURE 7.5 – Écarts des fonctions de diagnostic  $F_{log}$  et  $F_{pow}$  par rapport à leurs valeurs en  $y^+ = 80$ . Les écarts de la fonction  $F_{pow}$  sont multipliés par le rapport  $\frac{S_\alpha}{S_{1/\kappa}}$  afin de pouvoir être comparés avec ceux de  $F_{log}$

## 4 Intensités turbulentes

L'intensité des fluctuations de vitesse peut être évaluée en calculant leur moyenne quadratique, également appelée R.M.S (de l'anglais *Root Mean Square*). On rappelle que la moyenne quadratique d'une quantité  $q$  est définie par :

$$\bar{q} = \sqrt{\overline{q^2}}$$

La figure 7.6 présente la moyenne quadratique  $\overline{u'^+} = \sqrt{\overline{u'^+{}^2}}$ ,  $\overline{v'^+} = \sqrt{\overline{v'^+{}^2}}$  et  $\overline{w'^+} = \sqrt{\overline{w'^+{}^2}}$  des fluctuations de vitesse exprimées dans les échelles internes, pour les

nombres de Reynolds étudiés. L'intensité turbulente de la vitesse normale présente une faible dépendance avec le nombre de Reynolds dans la couche interne et est donc peu affectée par les échelles externes. En revanche, le pic de l'intensité normale survient clairement en dehors de la couche interne et est fortement impacté par les échelles externes. La valeur maximale du pic exprimée dans les échelles internes augmente fortement avec le nombre de Reynolds tandis que le pic se décale vers la droite sous l'effet des échelles externes. Le pic voit sa largeur augmenter avec le nombre de Reynolds et commence à ressembler à un plateau d'intensité constante pour  $Re_\tau = 1100$ , ce qui est conforme à la loi d'intensité normale constante dans la couche de recouvrement (relation 6.25) prédite par le modèle des structures attachées.

Les profils des fluctuations transversales et longitudinales sont intéressants et présentent une forte dépendance avec le nombre de Reynolds, y compris dans la couche interne. Notamment, la valeur du pic de l'intensité turbulente augmente de manière significative avec le nombre de Reynolds, de près de 10 % pour la composante  $u$  et de 40 % pour la composante  $w$ . Ces observations sont conformes aux résultats de simulations numériques réalisées à ce jour [36, 38]. Cette dépendance des profils de  $\overline{u'^+}$  et  $\overline{w'^+}$  avec le nombre de Reynolds montre que l'échelle de vitesse de frottement  $u_\tau$  n'est pas la seule échelle de vitesse pertinente pour l'étude des fluctuations longitudinales et transversales dans la couche interne et conforte l'analyse de Townsend [4] qui formula l'hypothèse de grandes structures régies par les échelles externes agissant sur les composantes  $u$  et  $w$  mais n'affectant ni la composante normale de la vitesse  $v$  ni la contrainte de Reynolds  $\overline{u'v'}$ . Il est important de souligner que la position du pic exprimée dans les échelles internes est inchangée avec le nombre de Reynolds et vaut approximativement  $y^+ = 15$  et  $y^+ = 40$  pour les composantes  $u$  et  $w$ . La longueur visqueuse  $\delta_\nu$  reste donc une échelle de longueur tout à fait pertinente pour l'étude des fluctuations dans la couche interne. Le léger décalage du pic, vers la droite, observé pour la composante  $w$  peut être interprété comme un effet des échelles externes, qui peuvent jouer un rôle non négligeable à cette distance située vers la fin de la couche interne.

L'insuffisance des échelles internes à décrire les profils de fluctuation suggère l'utilisation d'un jeu d'échelles mixte basé sur la vitesse de frottement  $u_\tau$  et sur la vitesse au centre du canal  $U_c$ . L'étude menée par Panton [75] s'appuie sur une décomposition des fluctuations de vitesse  $u' = u'_A + u'_P$  en une partie passive  $u'_P$  (influencée par les échelles de vitesse  $u_\tau$  et  $U_c$ ) et une partie active  $u'_A$  (contrôlée

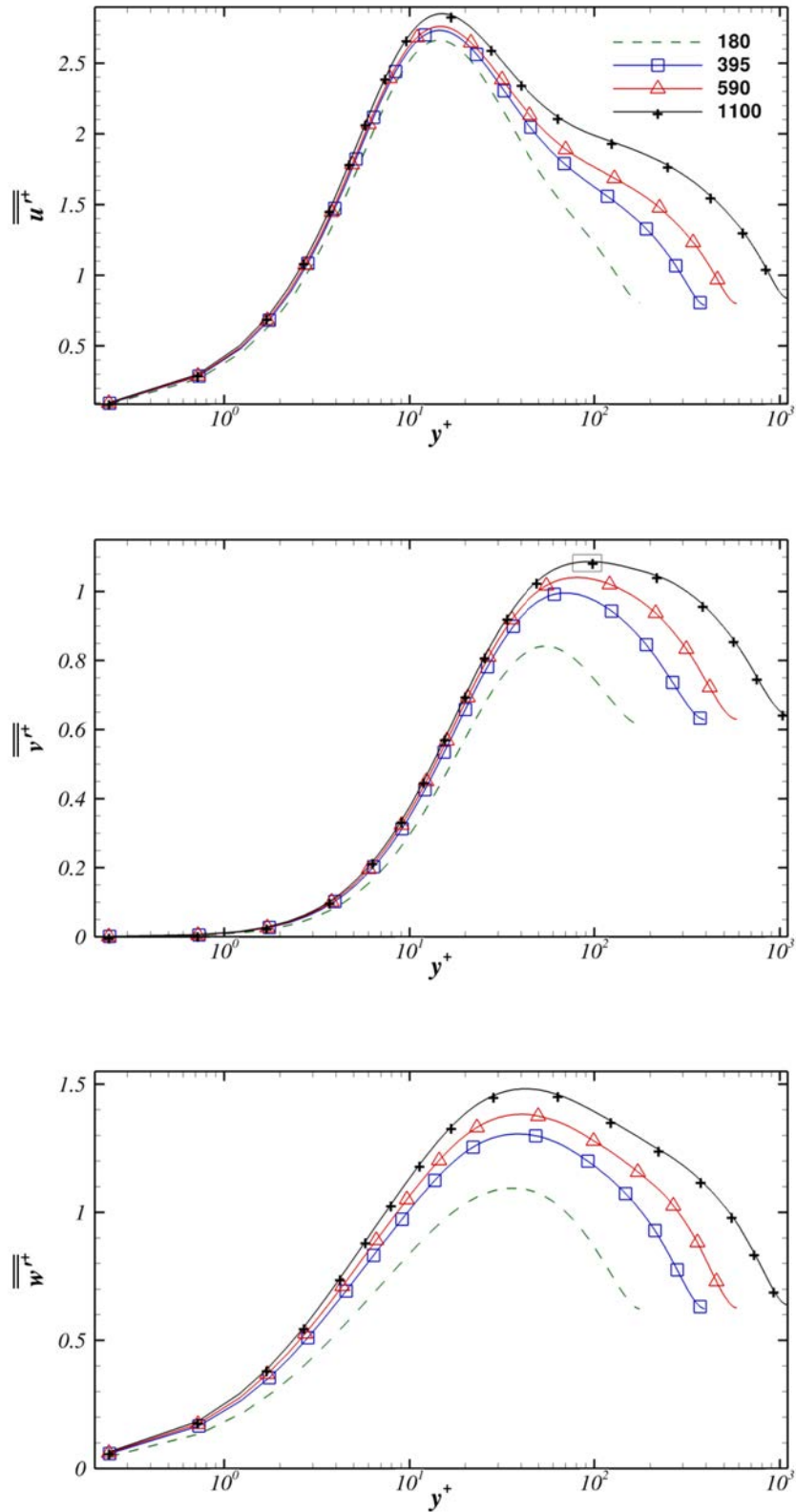


FIGURE 7.6 – Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$

uniquement par  $u_\tau$ ) et suggère la relation logarithmique  $\overline{u'^+2} = 0.95 \ln(Re_\tau) + 1.710$ , énoncée au chapitre précédent, entre le nombre de Reynolds de frottement et le maximum du pic turbulent obtenu pour la vitesse  $u$ . La figure 7.7 compare la valeur du pic  $\overline{u'^2}$  obtenu dans nos simulations numériques et dans les simulations de Hoyas et al. [38] avec la relation logarithmique de Panton [75]. Les résultats de simulation numérique sont concordants mais différent de ceux prédits par Panton [75]. Notamment, la pente mesurée entre  $Re_\tau = 590$  et  $Re_\tau = 1100$  vaut approximativement 0.8 (au lieu de 0.95). Cet écart n'est pas surprenant au regard des nombres de Reynolds relativement modérés considérés ici, la relation logarithmique proposée par Panton étant basée sur l'hypothèse de grands nombres de Reynolds.

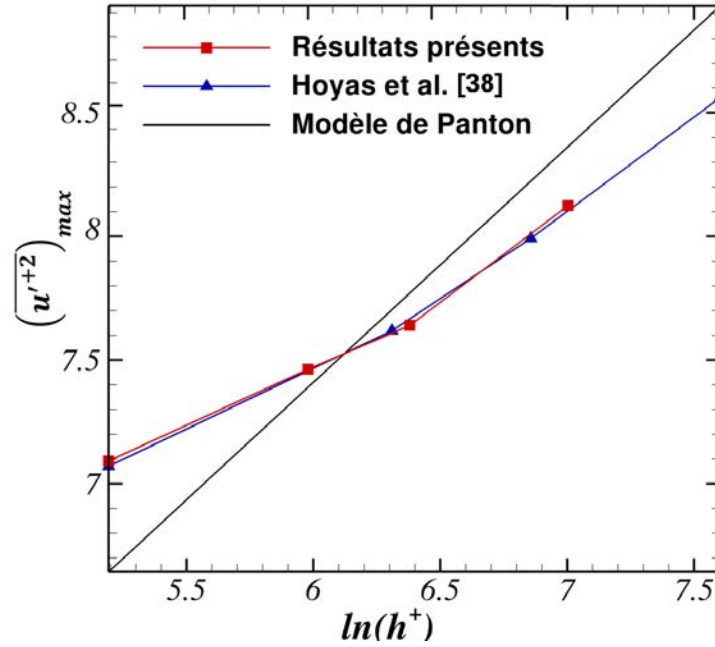


FIGURE 7.7 – Valeurs maximales de  $\overline{u'^+2}$  obtenues dans nos simulations (symboles carrés) et celles de Hoyas et al. [38] (symboles triangulaires) comparées avec la relation logarithmique proposée par Panton [75] (ligne pleine).

## 5 Contrainte de Reynolds $-\overline{u'v'}$

La figure 7.8a présente le profil de la contrainte de Reynolds  $-\overline{u'^+v'^+}$  ainsi que la contrainte totale exprimés dans les échelles internes pour la simulation à  $Re_\tau = 1100$ . Il est important de souligner que la contrainte totale obtenue est identique pour

l'ensemble des nombres de Reynolds et présente un excellent accord avec la loi linéaire (relation 6.14) énoncée dans le précédent chapitre. La conformité des résultats de simulation avec la loi linéaire permet de valider indirectement la qualité des résultats obtenus, la loi linéaire étant une loi théorique solide, démontrée et vérifiée expérimentalement, valable dans tout l'écoulement. On remarquera par ailleurs que la contrainte de Reynolds  $-\overline{u'v'}$  tend vers la contrainte totale au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois du fait de la diminution du terme de cisaillement (associé aux effets visqueux) dans l'équation de contrainte totale (équation 6.14).

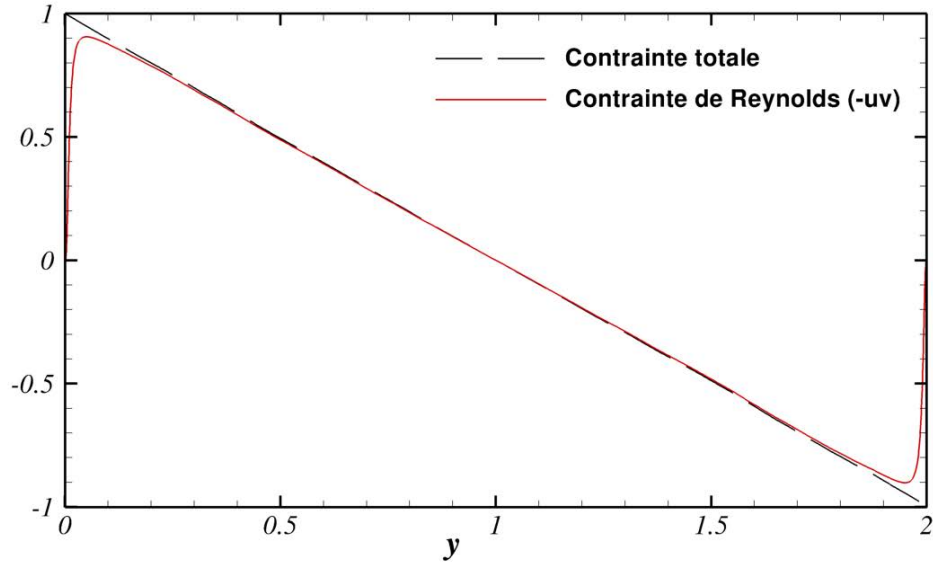
Les profils de la contrainte de Reynolds à proximité des parois sont représentés (dans les échelles internes) dans la figure 7.8b, pour les différents nombres de Reynolds étudiés ( $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$ ). Les échelles internes semblent tout à fait adaptées pour la contrainte de Reynolds dans la couche interne dont les profils sont quasiment identiques dans cette zone. Cette observation est parfaitement cohérente avec l'analyse de Townsend [4] selon laquelle les larges structures externes, responsables de l'échec des échelles internes pour les contraintes  $\overline{u'^+2}$  et  $\overline{w'^+2}$ , n'agissent pas sur la contrainte  $-\overline{u'v'}$ . La contrainte  $-\overline{u'v'}$  est alors seulement affectée par les structures actives, de petite taille, contrôlées par les échelles internes.

Le tableau 7.3 compare les valeurs maximales  $-\overline{u'^+v'^+}_{max}$  de la contrainte de Reynolds ainsi que la position  $y^+_{Max(\overline{u'v'})}$  des pics avec celles prédites par les relations proposées par Panton [75] pour les grands nombres de Reynolds :

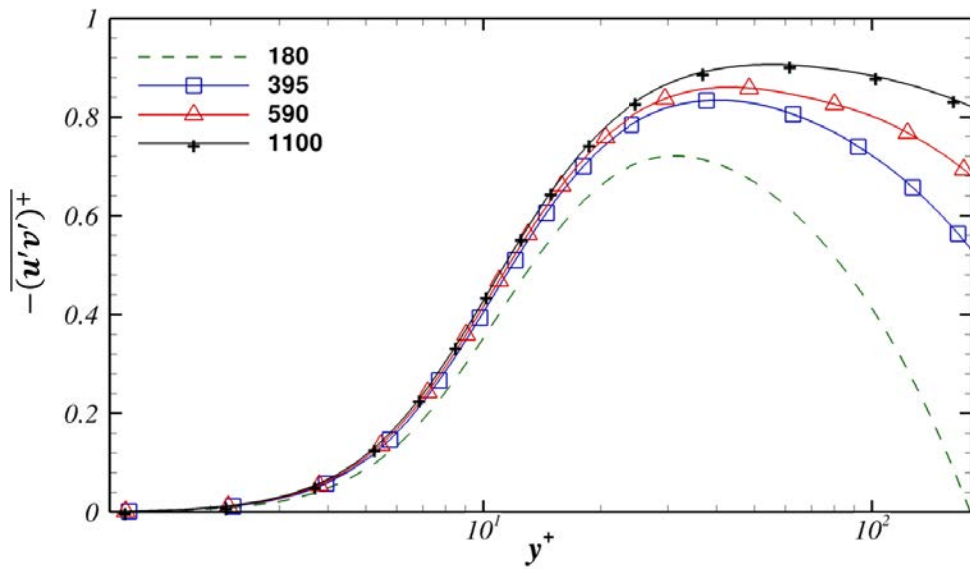
$$-\overline{u'^+v'^+}_{max} \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\kappa Re_\tau}} \quad (7.1)$$

$$y^+_{Max(\overline{u'v'})} \approx \sqrt{\frac{Re_\tau}{\kappa}} \quad (7.2)$$

Les valeurs de  $-\overline{u'^+v'^+}_{max}$  relevées sont en très bon accord avec celles prédites par la relation 7.1, à l'exception de la simulation à bas nombre de Reynolds où l'erreur reste relativement réduite (4.5%). En revanche, les estimations produites par la relation 7.2 sur la position des pics diffèrent sensiblement des positions finalement obtenues pour les cas  $Re_\tau = 180$  et  $395$ . L'accord entre les simulations et la relation 7.2 est cependant tout à fait satisfaisant pour les nombres de Reynolds plus élevés ( $Re_\tau = 590$  et  $Re_\tau = 1100$ ). Les relations proposées par Panton décrivent donc assez fidèlement les caractéristiques de la contrainte dans la couche de recouvrement pour les nombres de Reynolds considérés dans cette étude.



(a) Contrainte totale et contrainte de Reynolds exprimées dans les échelles internes à  $Re_\tau = 1100$



(b) Contrainte de Reynolds exprimée dans les échelles internes dans la zone de recouvrement pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$

FIGURE 7.8 – Profils de la contrainte totale et de la contrainte de Reynolds  $-\overline{u'v'}$

$Re_\tau$	$-\overline{u'^+v'^+}_{max}$ théorique	$-\overline{u'^+v'^+}_{max}$	Erreur	$y^+_{Max(-u'v')}$ théorique	$y^+_{Max(-u'v')}$
180	0.7549	0.7213	4.48%	22.06	32.21
395	0.8346	0.8345	0.00%	32.67	40.54
590	0.8646	0.8604	0.49%	39.93	43.52
1100	0.9008	0.9065	0.62%	54.52	55.55

TABLE 7.3 – Valeurs et positions des pics de la contrainte de Reynolds comparées avec les valeurs prédites par Panton [75]

## 6 Structure fine

Les moments d'ordre 3 et 4 des champs de vitesse appelés respectivement facteur de dissymétrie et facteur d'aplatissement sont des statistiques souvent utilisées pour l'étude de la turbulence. Le facteur de dissymétrie  $S(q')$  d'une quantité fluctuante  $q'$  est défini par :

$$S(q') = \frac{\overline{q'^3}}{\overline{q'^2}^{3/2}}$$

et mesure le décalage de la distribution de probabilité vers les événements positifs ( $S > 0$ ) ou négatifs ( $S < 0$ ). Le facteur de dissymétrie est nul pour toute densité de probabilité symétrique par rapport à zéro.

Le facteur d'aplatissement  $F(q')$  mesure de l'intermittence et est exprimé par :

$$F(q') = \frac{\overline{q'^4}}{\overline{q'^2}^2}$$

Le facteur d'aplatissement d'une distribution gaussienne est de 3. Les valeurs élevées de  $F$  traduisent un pic de probabilité plus resserré autour du centre ainsi qu'une décroissance moins rapide de la distribution de probabilité pour les événements les plus extrêmes. La turbulence est alors marquée par des événements rares mais violents dont l'intensité est très supérieure à l'intensité moyenne des fluctuations.

La figure 7.9 montre le facteur de dissymétrie des fluctuations pour les trois composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  de la vitesse. Les profils de  $S(w')$  sont très proches de zéro comme l'impose l'invariance de la physique dans la direction  $z$  et constituent une preuve indirecte de la convergence statistique des données. Les valeurs positives de  $S(u')$  à proximité des parois ( $S(u') = 1$ ) puis négatives au delà de  $y^+ = 10$  peuvent

s'expliquer par la présence des structures quasi-longitudinales qui, coté balayage, amènent des portions de fluide à vitesse élevée vers les parois. En effet, à proximité des parois, la vitesse locale est faible et proche de celle des portions de fluide éjectées des parois tandis que, côté balayage, les portions de fluide venant du cœur de l'écoulement ont une vitesse potentiellement beaucoup plus élevée que la vitesse locale et induisent des fluctuations de vitesse positives et relativement fortes. Au fur et à mesure que  $y^+$  augmente, la vitesse locale augmente également et se « rapproche » de la vitesse au centre du canal. La contribution (négative) des portions éjectées augmente donc progressivement et l'emporte sur la contribution (positive) des portions balayées au-delà de  $y^+ = 10$ . La dissymétrie des fluctuations de vitesse normale  $S(v')$ , qui dépend faiblement du nombre de Reynolds, est positive à proximité des parois ( $S(v') = 0.5$ ) et négative dans la sous couche tampon. Le facteur  $S(v')$  s'annule par ailleurs au centre du canal du fait de la symétrie de l'écoulement autour du plan médian.

La figure 7.10 présente le facteur d'aplatissement des différentes composantes de vitesse. L'intermittence de la composante normale aux parois est particulièrement élevée avec des valeurs supérieures à 30. L'ensemble des profils révèlent une intermittence relativement forte à proximité des parois qui décroît vers le centre du canal où les valeurs du facteur d'aplatissement sont relativement proches d'une distribution gaussienne (autour de 3). Enfin, on observe une forte dépendance des profils à proximité des parois avec le nombre de Reynolds. Le facteur d'aplatissement  $F(v')$  notamment varie de  $F(v') = 28$  pour  $Re_\tau = 180$  à  $F(v') = 42$  pour  $Re_\tau = 1100$ , ce qui correspond à une augmentation de 50%.

## 7 Analyse spectrale

La figure 7.11 présente les densités spectrales  $E_{u'u'}^+$ ,  $E_{v'v'}^+$ ,  $E_{w'w'}^+$  et  $E_{u'v'}^+$  (exprimées dans les échelles internes et prémultipliées par  $k_x^+ k_z^+$ ), dans le plan parallèle aux parois  $(x, z)$ , des fluctuations  $u'$ ,  $v'$  et  $w'$  du champ de vitesse et de  $u'v'$  à  $y^+ = 12$ . Les spectres obtenus à  $Re_\tau = 1100$  (couleurs) sont juxtaposés avec ceux obtenus à  $Re_\tau = 395$  (contours). La figure 7.11 comporte deux zones : la zone centrale où l'intensité spectrale est supérieure à 0.625 fois le maximum du spectre et une zone périphérique correspondant à 0.125 fois le maximum du spectre.

Les spectres  $E_{v'v'}^+$  et  $E_{u'v'}^+$  présentent une signature spectrale quasiment identique pour les deux nombres de Reynolds considérés et sont donc parfaitement bien



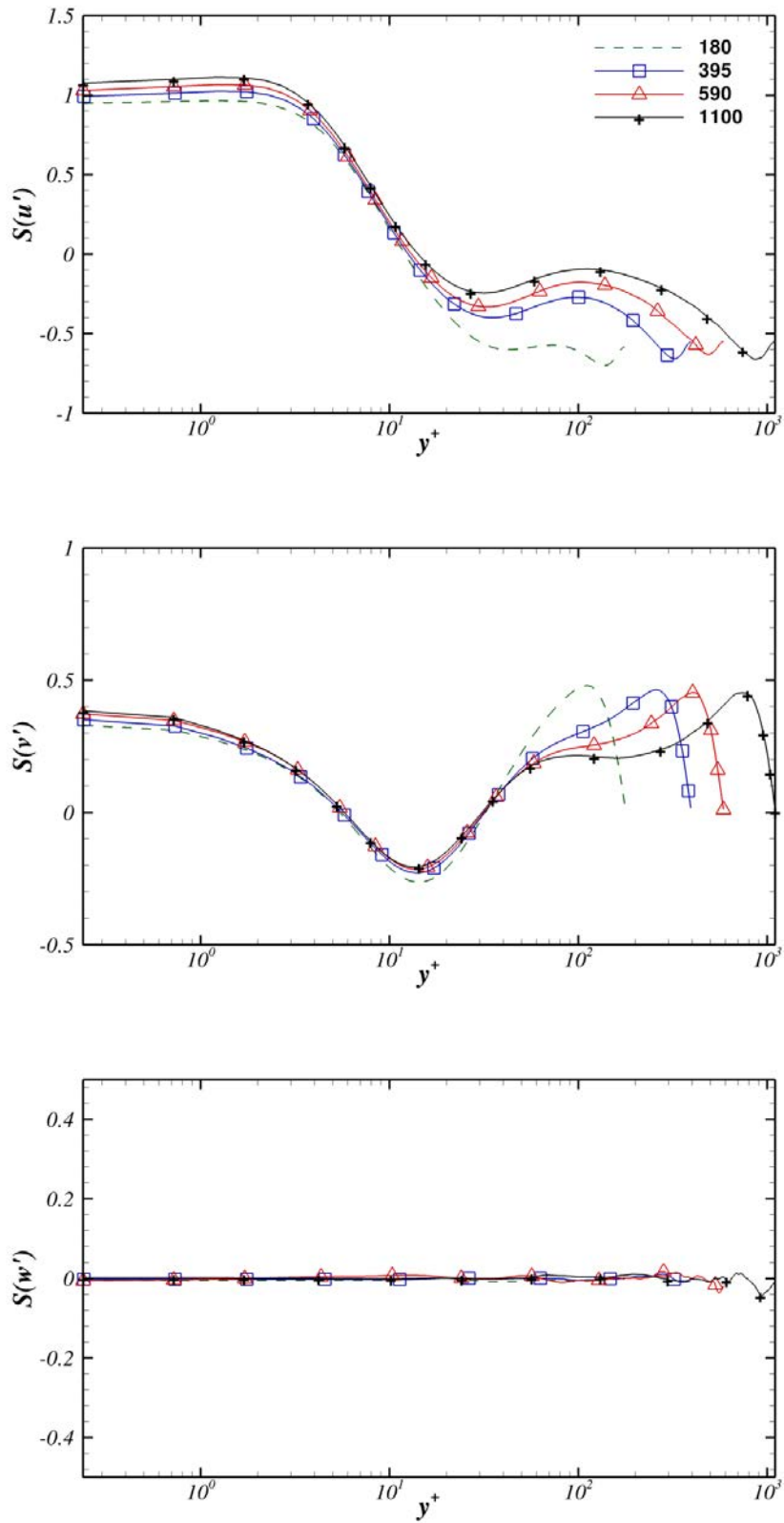


FIGURE 7.9 – Facteur de dissymétrie des fluctuations longitudinales, normales à la paroi et transversales.

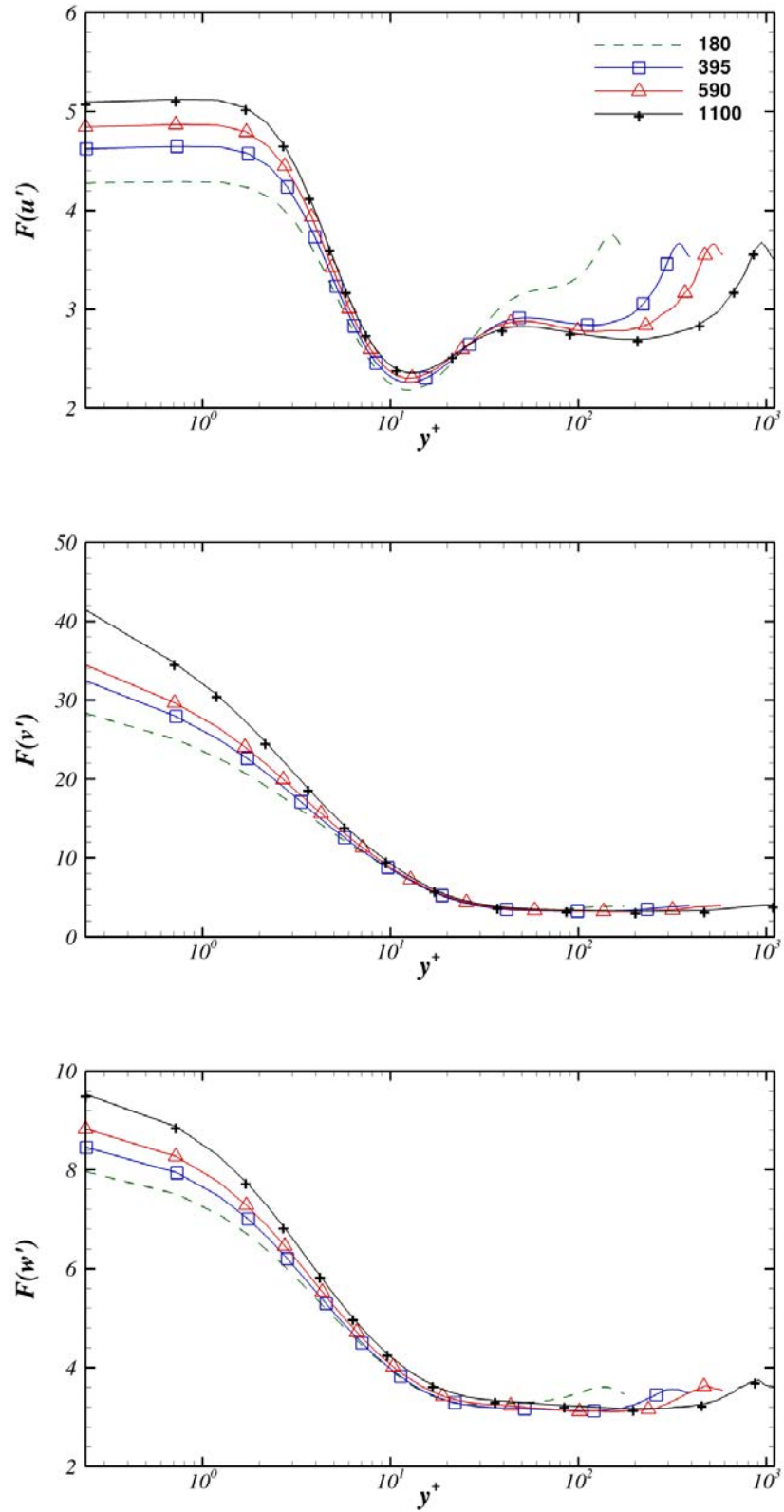


FIGURE 7.10 – Facteur d'aplatissement des fluctuations longitudinales, normales à la paroi et transversales.

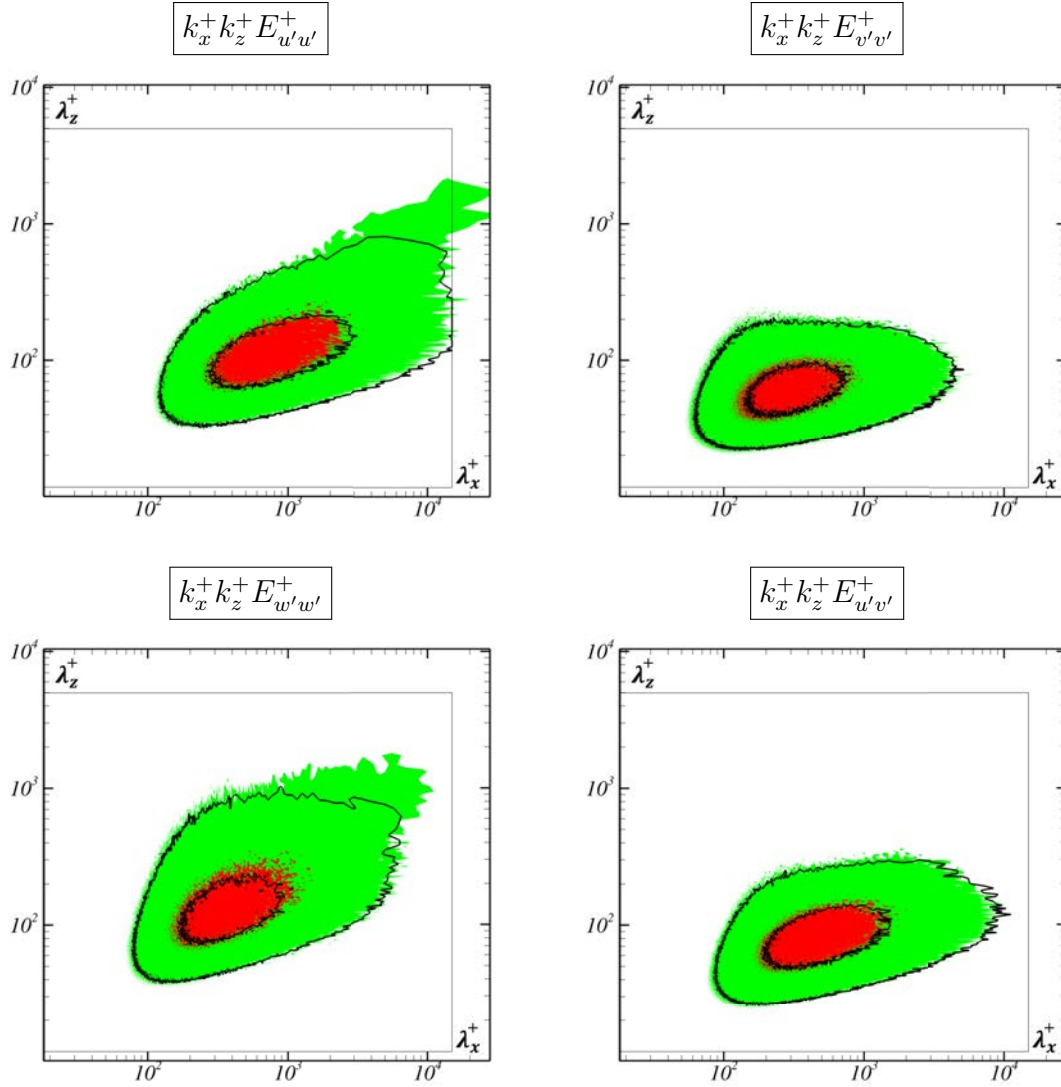


FIGURE 7.11 – Densités spectrales pré-multipliées par  $k_x^+ k_z^+$  de  $u'u'$ ,  $v'v'$ ,  $w'w'$  et  $u'v'$  dans le plan  $(x, z)$  à  $y^+ = 12$ . Les contours et les couleurs délimitent respectivement les spectres de  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . Les zones centrale et périphérique correspondent respectivement aux modes dont l'intensité est supérieure à 0.625 et 0.125 fois le maximum de l'intensité spectrale pour le plus grand nombre de Reynolds ( $Re_\tau = 1100$ ) comme dans Hoyas et al. [38]

décrits par les échelles internes. Ce résultat est cohérent avec l'invariance des intensités turbulentes  $\overline{v'^+{}^2}$  et  $-\overline{u'^+v'^+}$  (dans les échelles internes) avec le nombre de Reynolds dans la couche interne. On observe également une bonne coïncidence des deux zones dans les spectres  $E_{u'u'}^+$  et  $E_{w'w'}^+$  pour les longueurs d'ondes inférieures et intermédiaires correspondant aux petites structures de l'écoulement, essentiellement contrôlées par les échelles internes.

L'excroissance observée dans les spectres  $E_{u'u'}^+$  et  $E_{w'w'}^+$  dans le cas  $Re_\tau = 1100$  dans la partie supérieure droite (grandes longueurs d'onde) peut être interprétée comme la signature spectrale de structures très larges, pour lesquelles les échelles internes sont inadaptées. Par ailleurs, la coïncidence parfaite des spectres  $E_{v'v'}^+$  et  $E_{u'v'}^+$  suggère que ces structures n'agissent pas sur la contrainte de Reynolds. Ces observations confortent donc l'analyse de Townsend [4] selon laquelle, dans la couche interne, les grandes structures de l'écoulement sont passives et n'agissent pas sur la contrainte de Reynolds.

La figure 7.12 montre les densités spectrales des fluctuations de vitesse ( $u'$ ,  $v'$  et  $w'$ ) et de  $u'v'$  à  $y^+ = 100$ , c'est à dire au-delà de la couche interne. Les signatures spectrales sont similaires pour les longueurs d'onde intermédiaires, correspondant aux petites structures de l'écoulement. Les échelles internes contrôlent donc les petites structures de l'écoulement au-delà de la couche interne. L'augmentation très nette des longueurs d'onde élevées par rapport aux spectres en  $y^+ = 12$  témoigne d'une influence accrue des grandes structures de l'écoulement sur les fluctuations de vitesse et de la contrainte de Reynolds. Ce phénomène est particulièrement marqué pour la composante longitudinale  $u$  où la zone centrale (correspondant au maximum des fluctuations) s'étend jusqu'aux longueurs d'onde très élevées. On notera par ailleurs que l'apparition d'une excroissance dans le spectre  $E_{u'v'}^+$  dans le cas  $Re_\tau = 1100$  indique que les grandes structures, passives dans la couche interne, jouent un rôle actif au-delà et contribuent à la contrainte de Reynolds.

Il est intéressant de remarquer que les modes du spectre  $E_{u'u'}^+$  semblent se répartir selon une ligne, représentée par la droite (AB) dans la figure 7.12, dont la pente correspond à la loi  $\lambda_z \propto \lambda_x^{1/2}$  établie par Del Alamo et al. [78]. Cette propriété, valable uniquement dans la couche de recouvrement, suggère une dépendance similaire entre la longueur des structures et leur largeur. D'après Del Alamo [78], la loi  $\lambda_z \propto \lambda_x^{1/2}$  peut s'expliquer en considérant la diffusion turbulente des fluctuations de vitesse dans la direction  $z$  par les structures tourbillonnaires. La longueur de

diffusion latérale turbulente d'une fluctuation  $u'$  par les tourbillons peut s'exprimer à partir de la viscosité turbulente  $\nu_t$  par  $\lambda_z = 2\sqrt{\nu_t t}$  pour des temps  $t$  suffisamment longs. Dans le même temps, la fluctuation  $u'$  s'allonge selon la relation  $\lambda_x = u't$  en raison de la différence de vitesse entre le cœur de la fluctuation, de vitesse  $U + u'$ , et son début, de vitesse  $U$ . La largeur  $\lambda_z$  des structures peut alors s'exprimer à partir de  $\lambda_x$  par la relation :

$$\lambda_z = 2\sqrt{\nu_t \lambda_x / u'}$$

soit  $\lambda_z \propto \lambda_x^{1/2}$ . On notera que selon les hypothèses de la loi logarithmique, la viscosité turbulente est donnée par  $\nu_t = \kappa y$ . De plus, les mesures de l'étendue longitudinale réalisées par Tomkins et al. [79] indiquent que la longueur des structures est approximativement proportionnelle à leur position  $y$ . Ces éléments convergent vers l'existence d'une relation linéaire entre la position  $y$  des structures et leurs dimensions ( $\lambda_z \propto \lambda_x \propto y$ ) et sont conformes au modèle des structures attachées de Townsend [4] qui suppose que les grandes structures sont attachées aux parois et sont donc essentiellement gouvernées par l'échelle de longueur  $y$ .

## 8 Transport des contraintes de Reynolds

L'expression des différents termes des équations de transport 6.5 fait intervenir de nombreuses dérivées intermédiaires qui rendent leur estimation expérimentale extrêmement délicate voire impossible en raison de l'accumulation des erreurs de mesures commises. Les simulations numériques en revanche permettent une estimation beaucoup plus fiable de ces termes et sont à ce jour l'approche la plus précise pour l'étude des équations de transport.

### 8.1 Transport dans la couche interne

De manière analogue aux autres quantités de l'écoulement, la physique du transport des intensités turbulentes dépend de la zone de l'écoulement considérée. A proximité des parois, les effets visqueux jouent un rôle essentiel et les échelles internes semblent les plus appropriées pour l'étude des équations de transport. La figure 7.13 présente les termes de  $\mathcal{P}_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $\pi_{ij}^{(s)}$ ,  $\pi_{ij}^{(d)}$ ,  $\tilde{D}_{ij}$  et  $-\tilde{\epsilon}_{ij}$  de l'équation 6.5 des contraintes  $\overline{u'_i u'_j}$  à  $Re_\tau = 1100$ . Les profils de la figure 7.13 sont exprimés dans les échelles internes et sont donc normalisés par le facteur  $\frac{u_\tau^4}{\nu}$ . Les contraintes  $\overline{v'v'}$  et  $\overline{w'w'}$  sont caractérisées par une production nulle et par des termes de corrélation pression-déformation ( $\pi_{ij}^{(s)}$ ) positifs. On notera par ailleurs que  $\pi_{11}^{(s)} = -(\pi_{22}^{(s)} + \pi_{33}^{(s)})$

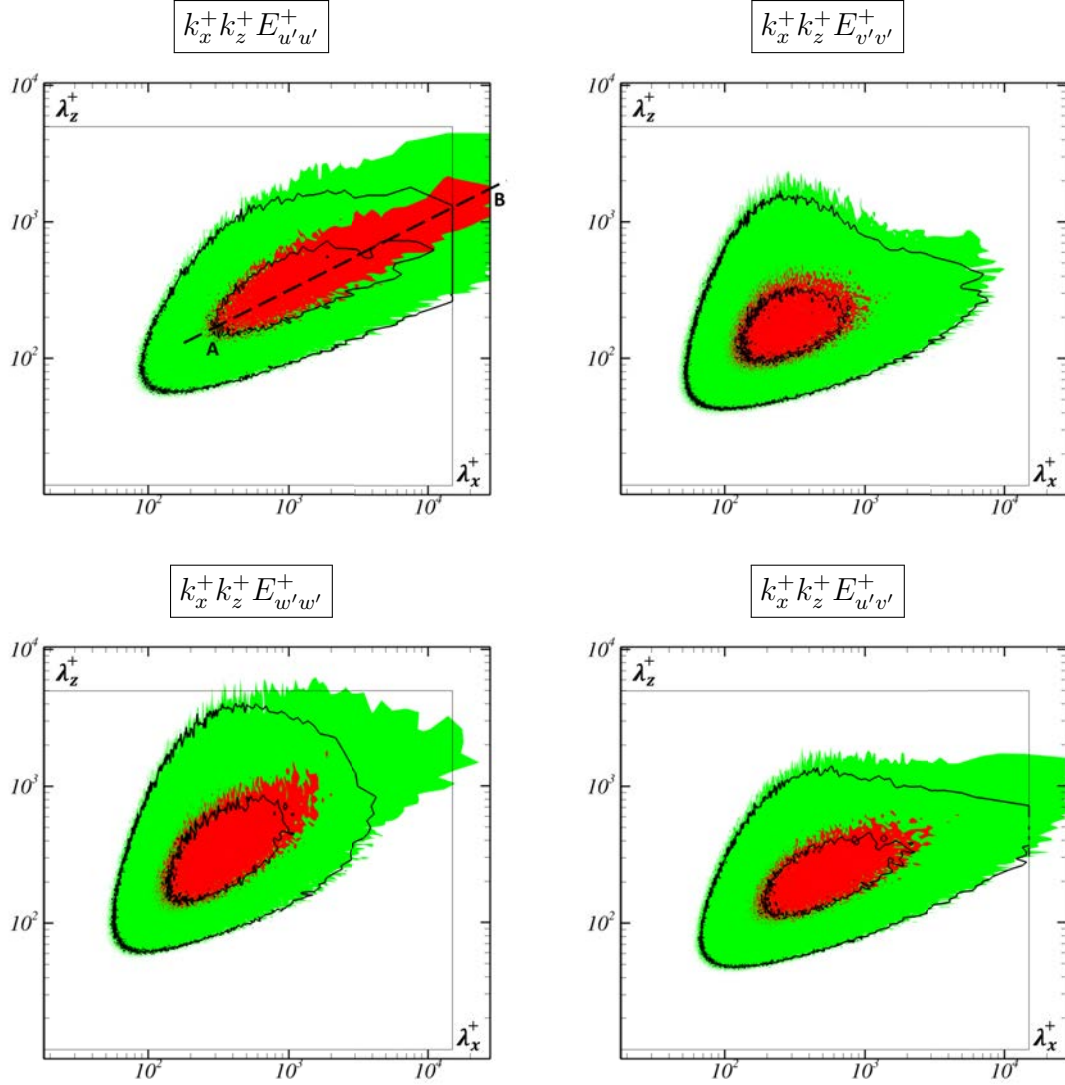


FIGURE 7.12 – Densités spectrales pré-multipliées par  $k_x^+ k_z^+$  de  $u'u'$ ,  $v'v'$ ,  $w'w'$  et  $u'v'$  dans le plan  $(x, z)$  à  $y^+ = 100$ . Les contours et les couleurs délimitent respectivement les spectres de  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . Les zones centrale et périphérique correspondent respectivement aux modes dont l'intensité est supérieure à 0.625 et 0.125 fois le maximum de l'intensité spectrale pour le plus grand nombre de Reynolds ( $Re_\tau = 1100$ ) comme dans Hoyas et al. [38]

du fait de l'incompressibilité de l'écoulement. Ces observations sont conformes au mécanisme d'alimentation des contraintes  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  par le terme  $\pi_{11}^{(s)}$  de la contrainte  $\overline{u'^2}$  discuté dans le chapitre 6.

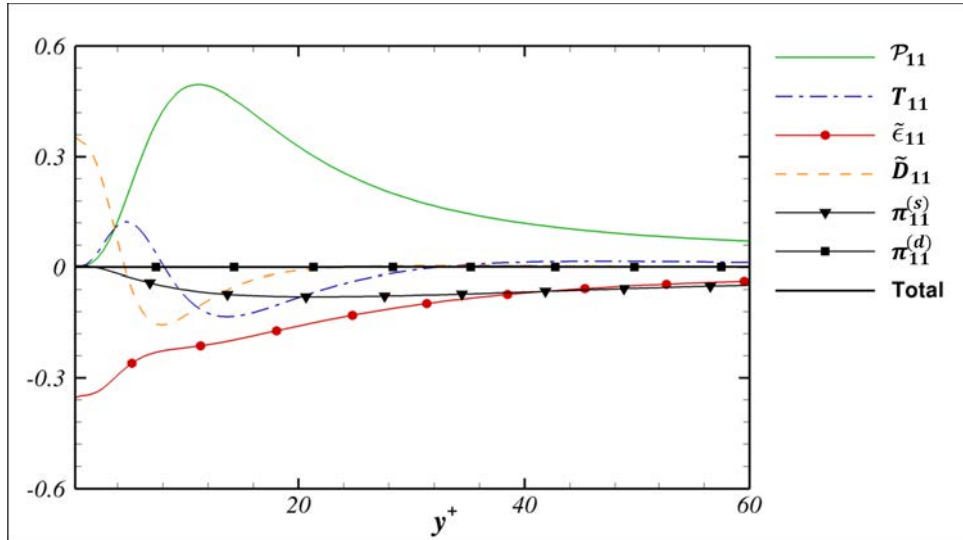
Nous avons vu précédemment que les profils d'intensité turbulente  $\overline{u'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  exprimés en échelles internes présentent une forte dépendance avec le nombre de Reynolds. Un comportement similaire a pu être constaté pour les profils des termes des équations de transport. A titre d'exemple, la figure 7.14 montre la variation du profil de la pseudo-dissipation  $\tilde{\epsilon}_K = \nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}$  de l'énergie turbulente avec le nombre de Reynolds. Les valeurs de la pseudo-dissipation aux parois varient très fortement et semblent donc particulièrement affectées par les effets externes. La figure 7.15 montre les valeurs des pics de  $\tilde{\epsilon}_{ij}$ ,  $\pi_{ij}^{(s)}$ ,  $\pi_{ij}^{(d)}$  et  $\mathcal{P}_{ij}$  relevées pour les différents nombres de Reynolds et normalisées par rapport au cas  $Re_\tau = 180$ . La valeur réelle des pics ainsi que leur position exacte est indiquée dans le tableau 7.4. Il est à noter que les termes de pseudo-diffusion et de transport ne sont pas considérés ici du fait de leur poids relativement faible par rapport aux autres termes des équations de transport (voir figure 7.13). On observe une variation relativement importante des composantes liées à la pseudo-dissipation et à la pression. Les valeurs des pics de  $\pi_{22}^{(s)}$  et  $\tilde{\epsilon}_{33}$  sont respectivement multipliées par 2 et 1.8 entre  $Re_\tau = 180$  et  $Re_\tau = 1100$ . La dépendance du terme de production est également notable mais néanmoins nettement plus faible. Le pic de production ne varie en effet que d'un facteur 1.1 entre  $Re_\tau = 180$  et  $Re_\tau = 1100$ .

L'étude menée par Hoyas et al. [80] propose une explication de l'effet des échelles externes sur les termes de dissipation à travers la création d'une couche limite de vorticité,   proximité immédiate de la paroi, lors du passage des grandes structures. La dissipation aux parois est en effet directement reliée aux intensités turbulentes des composantes de la vorticité :

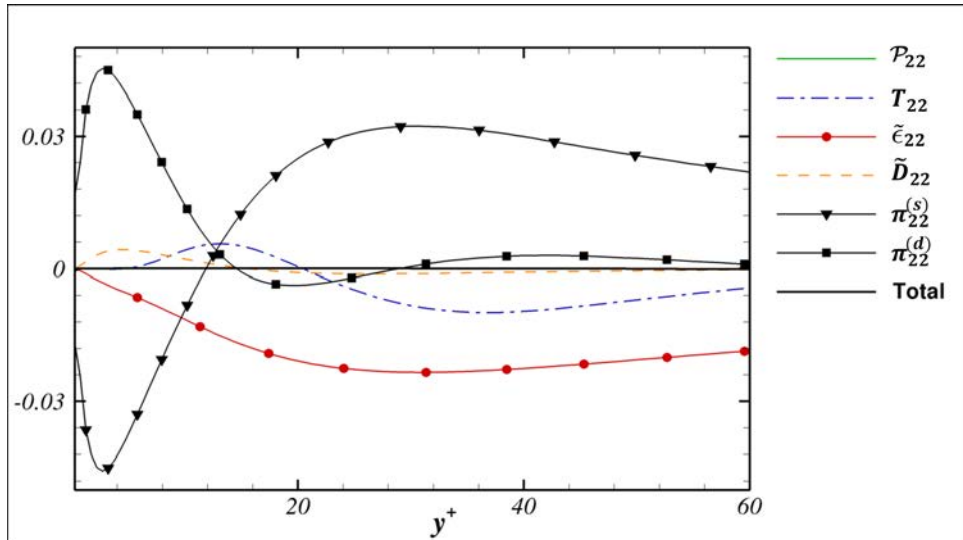
$$\tilde{\epsilon}_{11}|_{y=0} = -2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}_{y=0} = -2\nu \overline{\omega_z'^2}(y=0) \quad (7.3)$$

$$\tilde{\epsilon}_{33}|_{y=0} = -2\nu \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2}_{y=0} = -2\nu \overline{\omega_x'^2}(y=0) \quad (7.4)$$

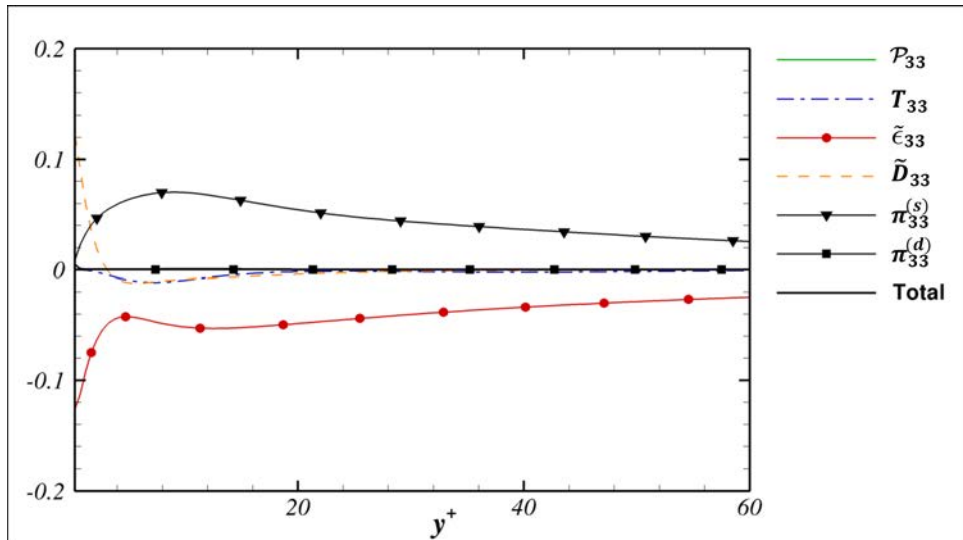
L'étude de Hoyas et al. [80] s'appuie sur l'analyse des spectres de l'énergie cinétique et de l'enstrophie  $\zeta = \frac{1}{2}\omega'_i\omega'_i$  (où  $\omega'_i$  correspond aux fluctuations de la composante  $i$  de la vorticité)    $y^+ = 6, 10$  et  $14$     $Re_\tau = 2000$ . La figure 7.16 présente les



(a) Transport de  $\overline{u'u'}$

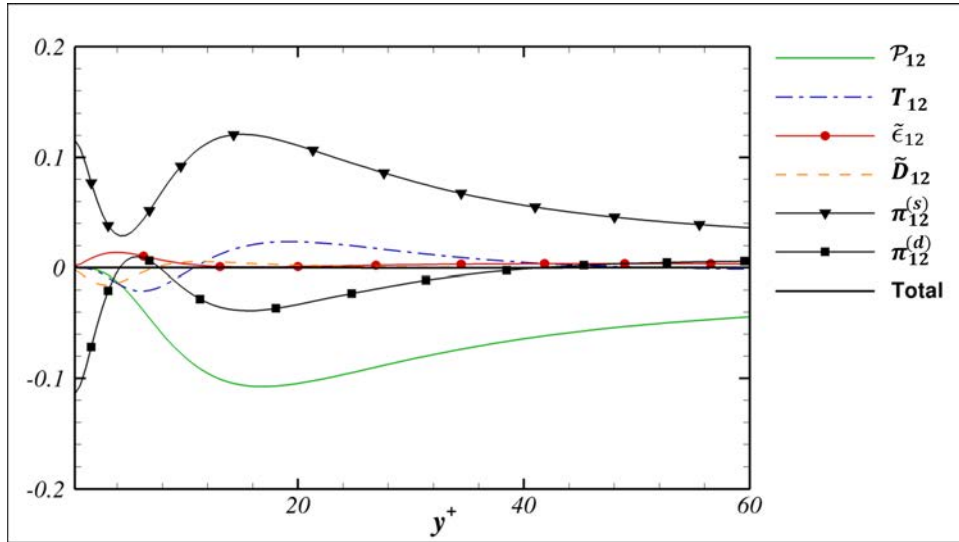


(b) Transport de  $\overline{v'v'}$

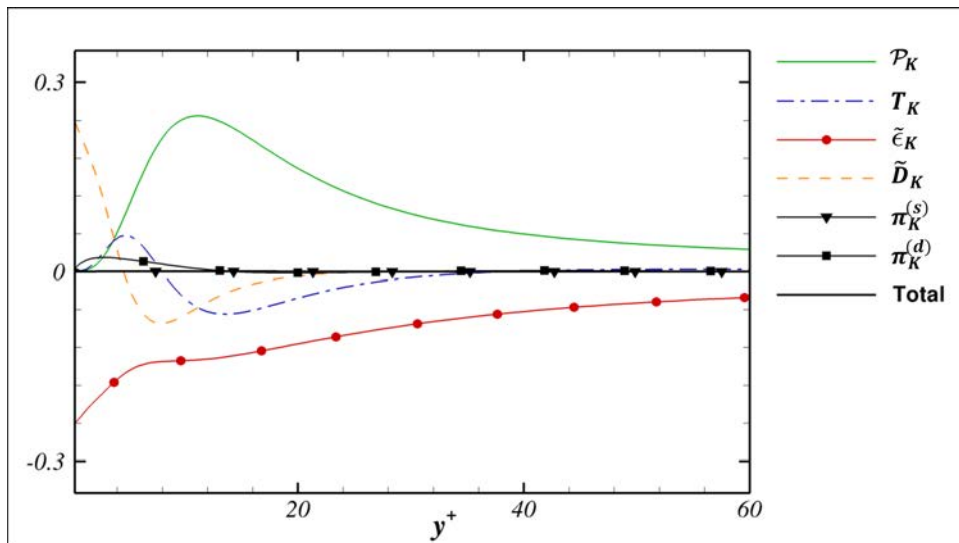


(c) Transport de  $\overline{w'w'}$





(d) Transport de  $\overline{u'v'}$



(e) Transport de  $\overline{K} = \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k}$

FIGURE 7.13 – Profils des termes des équations de transport à  $Re_\tau = 1100$  dans la couche interne. Les profils sont normalisés par  $\frac{u_\tau^4}{\nu}$

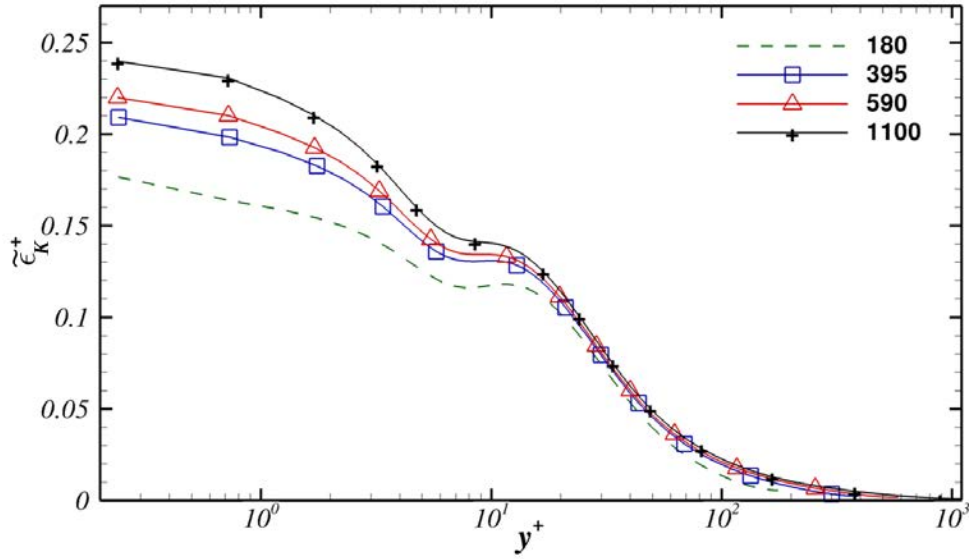


FIGURE 7.14 – Profils de la pseudo-dissipation de l'énergie cinétique exprimée dans les échelles internes

$Re_\tau$	180	395	590	1100	Position du pic
$\tilde{\epsilon}_{11}$	-0.28533	-0.31728	-0.32856	-0.35322	Parois
$\tilde{\epsilon}_{22}$	-0.016398	-0.020700	-0.021862	-0.0234145	$y^+ \approx 30$
$\tilde{\epsilon}_{33}$	-0.067900	-0.100867	-0.111329	-0.1263555	Parois
$\tilde{\epsilon}_{12}$	0.0109646	0.0128971	0.0132651	0.0139256	$y^+ \approx 4$
$\tilde{\epsilon}_K$	-0.176664412	-0.209149379	-0.220027003	-0.239880979	Parois
$\pi_{11}^{(s)}$	-0.055717	-0.070345	-0.073793	-0.079384	$y^+ \approx 24$
$\pi_{22}^{(s)}$	-0.0229380	-0.0358484	-0.0398548	-0.0456758	$y^+ \approx 23$
$\pi_{33}^{(s)}$	0.0415860	0.0585264	0.0630074	0.0702605	$y^+ \approx 10$
$\pi_{12}^{(s)}$	0.0790357	0.102829	0.109071	0.121025	$y^+ \approx 16$
$\pi_{12}^{(d)}$	-0.0501813	-0.0820430	-0.0964015	-0.114063	Parois
$\pi_{22}^{(d)}$	0.0226905	0.0354973	0.0394621	0.045273	$y^+ \approx 3$
$\mathcal{P}_{11}$	0.435550	0.471894	0.477397	0.495136	$y^+ \approx 11$
$\mathcal{P}_{12}$	-0.0762668	-0.0951096	-0.0996606	-0.107415	$y^+ \approx 17$

TABLE 7.4 – Valeurs et positions des pics (dans les échelles internes) pour les termes  $\tilde{\epsilon}_{ij}$ ,  $\pi_{ij}^{(s)}$ ,  $\pi_{ij}^{(d)}$  et  $\mathcal{P}_{ij}$  de l'équation de budget pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et 1100

spectres obtenus pour les mêmes distances dans le cas de la simulation à  $Re_\tau = 1100$ . Les spectres de l'intensité turbulente à  $y^+ = 6, 10$  et 14 sont quasiment identiques et présentent une forte excroissance dans la partie supérieure droite correspondant

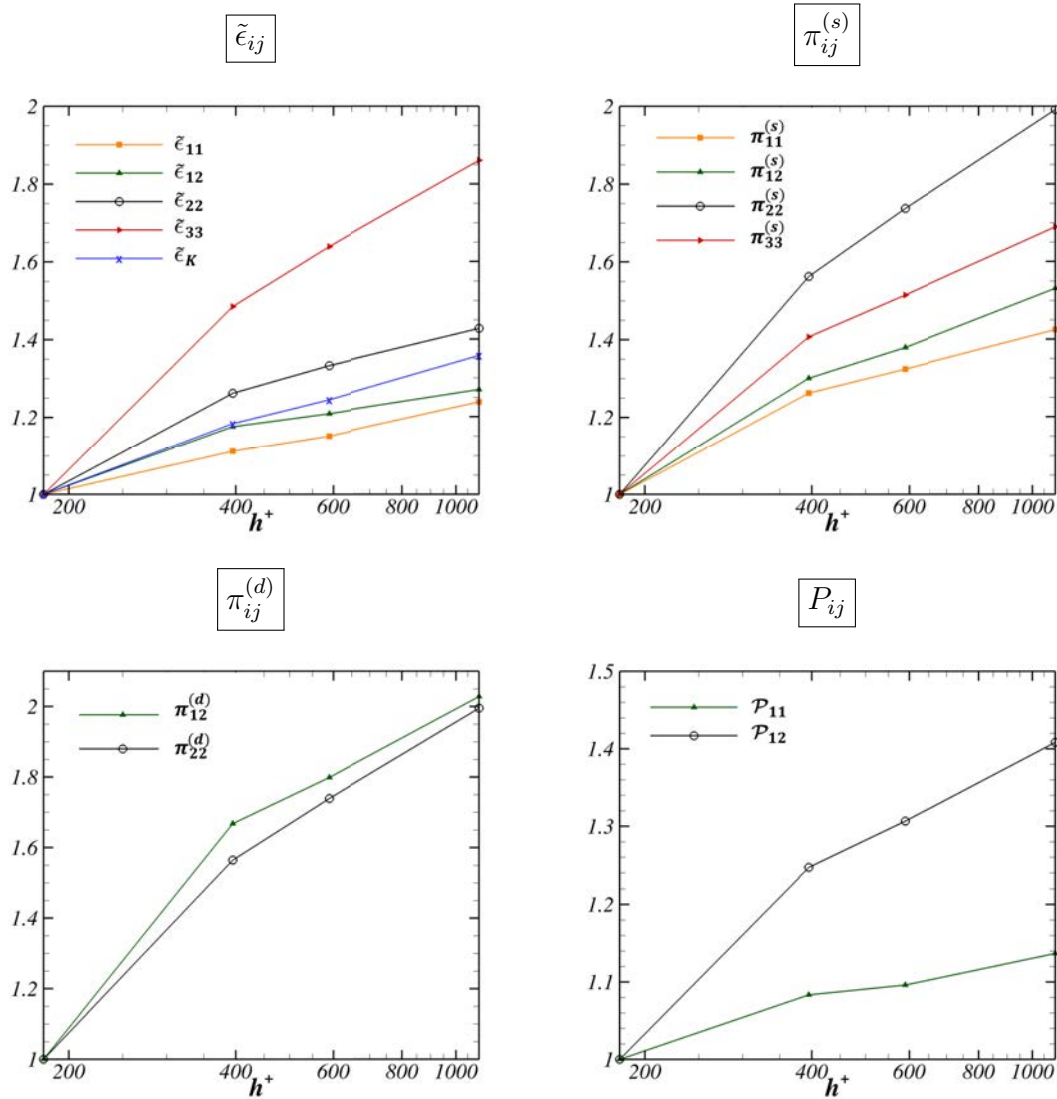


FIGURE 7.15 – Évolution de la valeur maximale des termes des équations de budget relevée dans la couche interne en fonction de  $Re_\tau$ . Les courbes sont normalisées par leurs valeurs respectives à  $Re_\tau = 180$  afin de faciliter la comparaison.

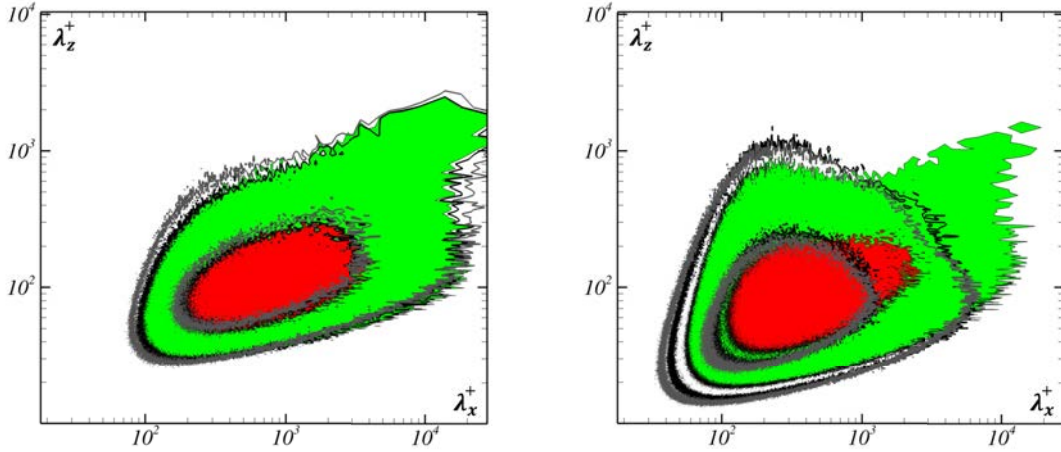


FIGURE 7.16 – Densités spectrales prémultipliées de l’énergie cinétique locale  $K = \frac{1}{2}u'_i u'_i$  (à gauche) et de l’enstrophie locale  $\zeta = \frac{1}{2}\omega'_i \omega'_i$  (à droite) pour  $Re_\tau = 1100$ . Les contours gris et noirs et les couleurs correspondent respectivement à  $y^+ = 14, 10$  et  $6$ . Les zones centrale et périphérique de chaque spectre contiennent 90% et 50% de l’intensité spectrale totale, comme dans Hoyas [80].

aux grandes échelles. Les contours des spectres de l’enstrophie à  $y^+ = 10$  et  $y^+ = 14$  sont également similaires mais restent limités aux échelles moyennes de l’écoulement. Les grandes structures semblent donc avoir un effet irrotationnel sur l’écoulement en  $y^+ = 10$  et  $y^+ = 14$ , comme le suggère le modèle des structures passives de Townsend [4]. En revanche, à  $y^+ = 6$ , on note l’apparition d’une excroissance des contours de l’enstrophie similaire à l’excroissance observée dans les spectres de l’énergie cinétique. Cet effet des grandes structures sur la vorticité à proximité des parois peut être attribué, selon Hoyas [80], par l’écoulement induit par les grandes structures irrotationnelles qui se comporterait comme l’écoulement potentiel externe d’une couche limite et créerait des couches locales visqueuses minces. L’excroissance observée dans le spectre de l’enstrophie serait alors la manifestation de la vorticité transverse associée à la couche limite générée par le passage des grandes structures. L’absence d’excroissance pour les spectres de l’enstrophie à  $y^+ \geq 10$  semble indiquer que cette couche limite est confinée dans l’environnement immédiat des parois à  $y^+ < 10$ .

Les relations 7.3 et 7.4 permettent de relier directement la dissipation aux parois aux fluctuations de vorticité induites par les grandes structures. L’augmentation de la dissipation aux parois peut alors s’expliquer par l’augmentation de la population des grandes structures avec le nombre de Reynolds.

## 8.2 Transport dans la couche de recouvrement

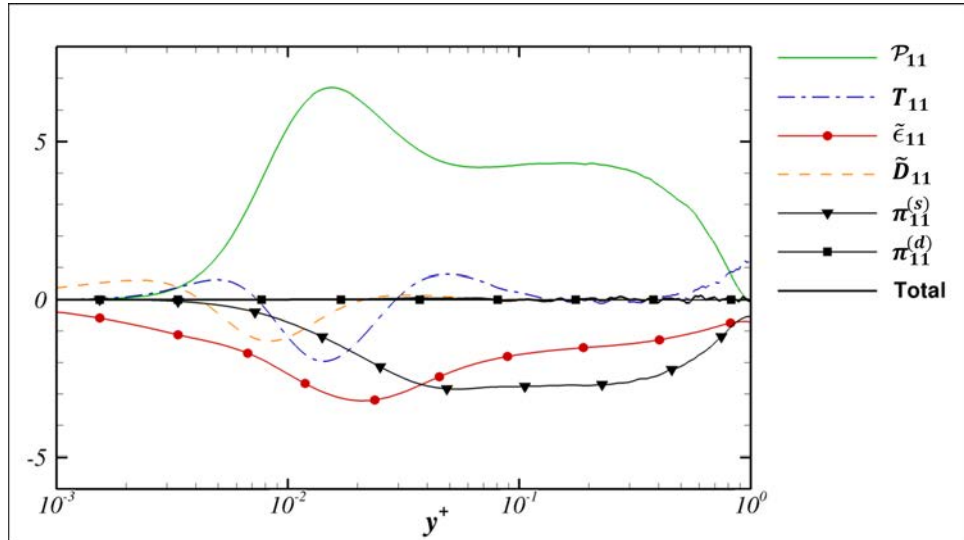
On considère ici l'hypothèse selon laquelle l'écoulement moyen dans la couche de recouvrement est décrit par la loi logarithmique classique  $U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$ . Dans ce cas, la contrainte de Reynolds dans cette zone de l'écoulement est constante et égale à  $u_\tau^2$  et le cisaillement moyen est donné par la relation  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y}$ . La production de l'énergie turbulente dans la couche de recouvrement est donc :

$$\mathcal{P} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-u_\tau^3}{\kappa y}$$

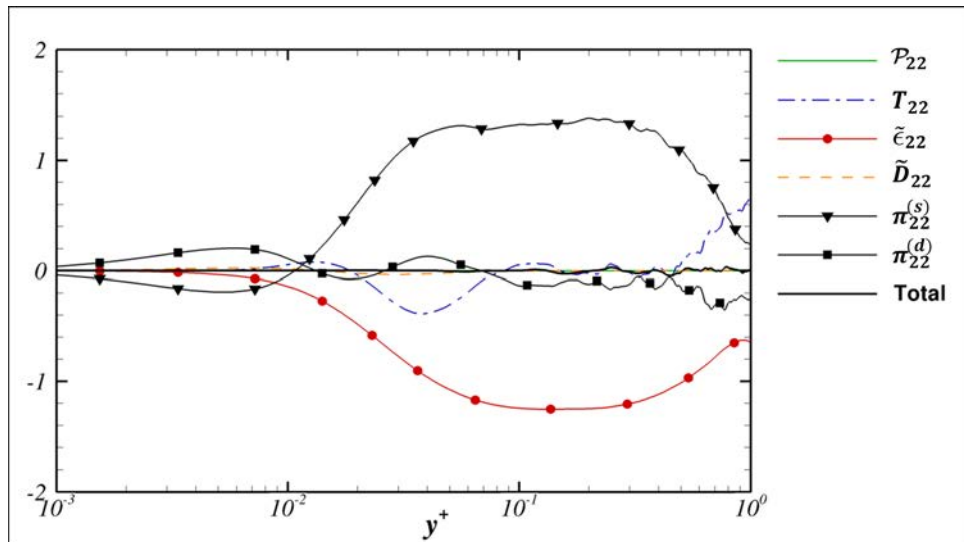
Le terme de production présente donc une dépendance avec  $y^{-1}$  dans la couche de recouvrement et on peut raisonnablement supposer [80] qu'il en est de même pour les autres termes du fait de l'équilibre entre les différents termes de l'équation de transport des contraintes de Reynolds. La figure 7.17 présente les différents termes des équations de transport prémultipliés par  $\frac{y}{u_\tau^3}$ , pour la simulation à  $Re_\tau = 1100$ . Les profils obtenus sont similaires à ceux présentés par Hoyas [80] dans le cas d'un écoulement à  $Re_\tau = 2000$  et semblent effectivement avoir un comportement proche de  $y^{-1}$  comme le montre la présence d'un plateau entre  $y^+ = 50$  et  $y/h < 0.2$ . On notera que la « qualité » du plateau observé dépend des termes considérés, le profil de production étant quasiment plat dans la couche de recouvrement tandis que la plupart des autres courbes présentent seulement une pente plus faible que dans le reste de l'écoulement. La dépendance approximative des profils présentés ici avec  $y^{-1}$  est cependant relativement satisfaisante étant donné que le nombre de Reynolds considéré ici est relativement modéré ( $Re_\tau = 1100$ ) et n'appartient pas à la catégorie des très grands nombres de Reynolds.

## 8.3 Sur l'estimation expérimentale de la dissipation

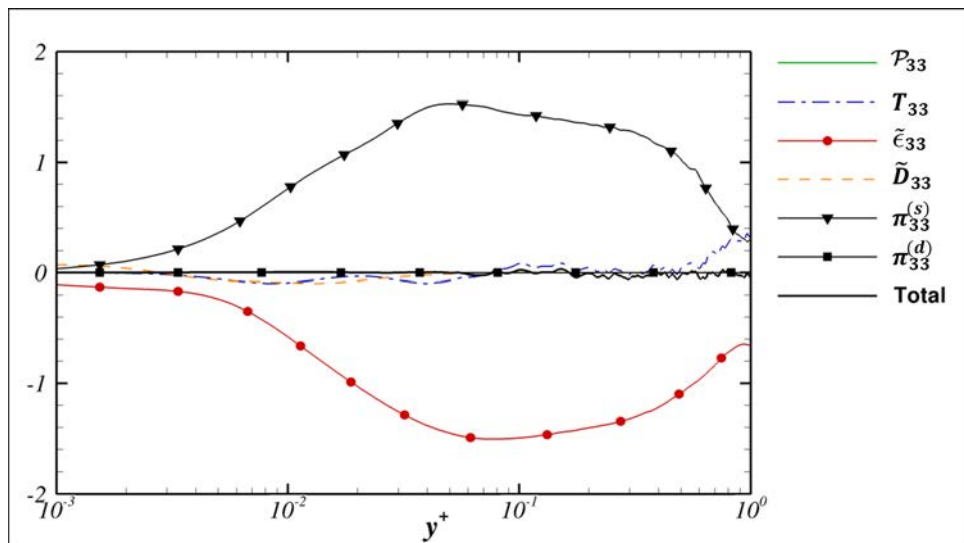
La figure 7.18 présente la distribution de la dissipation  $\epsilon_K^+ = \nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)}$  de l'énergie cinétique (voir section 2.2 du chapitre 6) ainsi que l'échelle de Kolmogorov associée  $\eta^+ = (\epsilon_K^+)^{-1/4}$ . La dissipation aux parois se comporte de manière analogue à la pseudo-dissipation et augmente fortement avec le nombre de Reynolds pour la gamme des nombres de Reynolds étudiés. Par ailleurs, la diminution de la dissipation au-delà de la paroi est conforme avec le comportement en  $y^{-1}$  de la dissipation et des autres termes de l'équation du budget de l'énergie cinétique discuté dans la section précédente. L'échelle de Kolmogorov à proximité des parois est d'environ  $1.5\delta_\nu$  pour  $y^+ < 20$  et augmente progressivement vers le centre du canal.



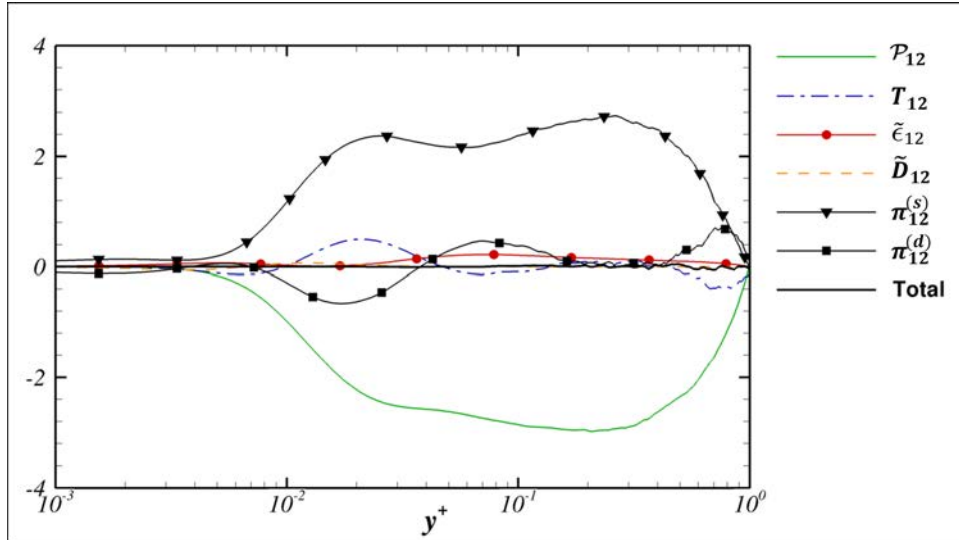
(a) Transport de  $\overline{u'u'}$



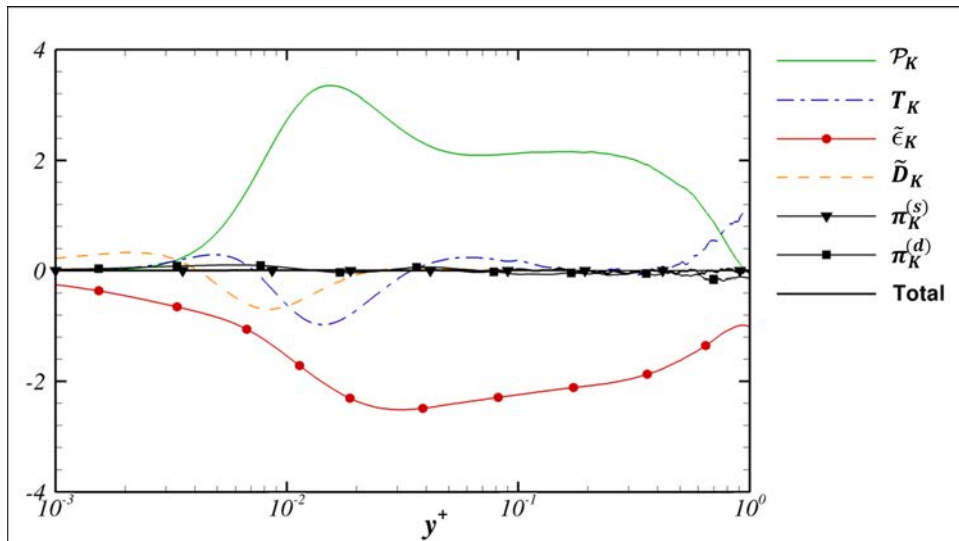
(b) Transport de  $\overline{v'v'}$



(c) Transport de  $\overline{w'w'}$



(d) Transport de  $\overline{u'v'}$



(e) Transport de  $\overline{K} = \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k}$

FIGURE 7.17 – Profils des termes des équations de transport à  $Re_\tau = 1100$  dans la couche interne. Les profils sont normalisés par  $\frac{y}{w_\tau^3}$

La dissipation de l'énergie turbulente est particulièrement délicate à mesurer expérimentalement en raison de la complexité de son expression :

$$\begin{aligned} \epsilon_K = 2\nu & \left( \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} \right) + \\ & \nu \left( \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2} \right) + \\ & 2\nu \left( \overline{\frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial y}} \right) \quad (7.5) \end{aligned}$$

La détermination expérimentale des dérivées est délicate et limitée par la résolution spatio-temporelle des sondes. L'obtention du profil de la dissipation réelle requiert d'effectuer la mesure de toutes les dérivées de la vitesse pour l'ensemble des positions d'acquisition et est donc une tâche très difficile, voir impossible. Il convient néanmoins de préciser que des capteurs constitués de neuf à douze sondes ont cependant été élaborés afin de pouvoir mesurer simultanément l'ensemble des dérivées de vitesse en un même point [81, 82, 83], mais leur utilisation reste extrêmement marginale. Par ailleurs, la mesure précise d'une dérivée pose de sérieuses contraintes en terme de miniaturisation, la distance entre les sondes devant être du même ordre que la taille des plus petites structures. La taille actuelle des sondes ne permet malheureusement pas de mesure suffisamment fiable des dérivées à proximité des parois en raison de la petite taille des échelles de Kolmogorov. Au-delà, les erreurs de mesure sont ramenées à un niveau raisonnable mais restent relativement importantes, comme le montre, par exemple, la dispersion des mesures de fluctuations de vorticité issues de différentes expériences [84, 85, 82] compilées par Tardu (voir le dernier chapitre de [86]). La détermination expérimentale d'une quantité telle que la dissipation, impliquant un grand nombre de dérivées, sera donc fortement impactée par l'accumulation des erreurs de mesure commises pour chaque dérivée. Ces éléments pris en considération, l'utilisation d'hypothèses simplificatrices permet d'aboutir à des approximations de la dissipation, impliquant un nombre plus réduit de dérivées, et de ramener à un degré acceptable la complexité et la lourdeur du protocole de mesure tout en évitant l'accumulation des erreurs de mesure individuelles.

Considérons tout d'abord l'hypothèse d'une turbulence localement homogène,



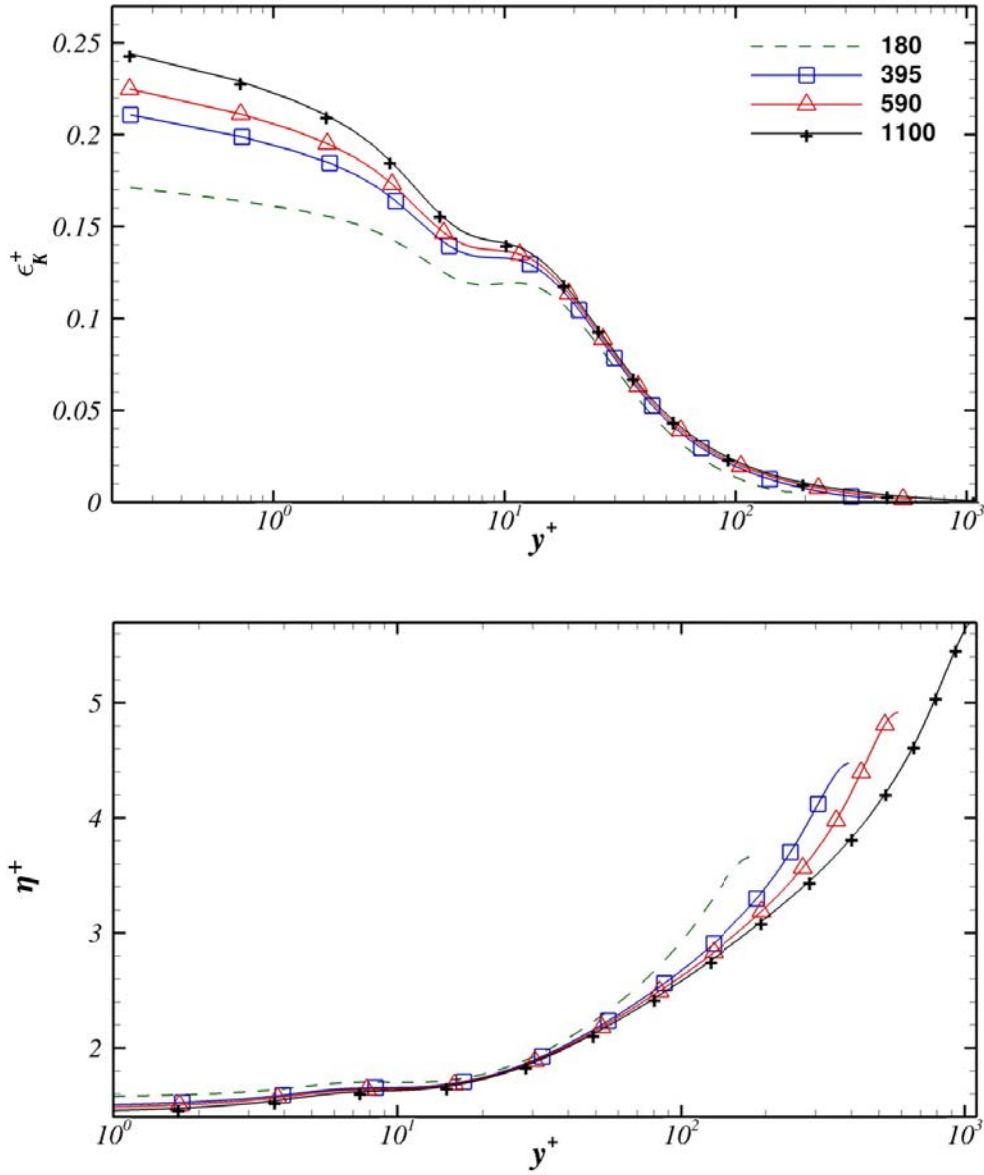


FIGURE 7.18 – Profils de la dissipation  $\epsilon_K^+ = \nu \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)$  et de l'échelle de Kolmogorov définie par  $\eta^+ = (\epsilon_K^+)^{-1/4}$ .

qui suppose l'invariance de l'écoulement par translation. Dans ce cas, les termes de corrélation entre les dérivées de vitesse sont nuls et la dissipation est donnée par :

$$\epsilon_{Khom} = 2\nu \left( \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} \right) + \nu \left( \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2} \right)$$

La figure 7.19 compare la forme exacte de la dissipation avec la dissipation homogène pour  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . La relation homogène constitue une excellente approximation à proximité des parois mais surévalue légèrement la dissipation au-delà ( $\epsilon_{Khom} > \epsilon_K$ ). Le rapport de la dissipation homogène par la dissipation réelle reste cependant très proche de 1 sur l'ensemble du canal. On notera que l'importance relative de la dissipation homogène par rapport à la dissipation réelle est inversée par rapport à l'étude numérique d'Antonia et al. [87] où la dissipation homogène est légèrement inférieure à la dissipation réelle ( $\epsilon_{Khom} < \epsilon_K$ ).

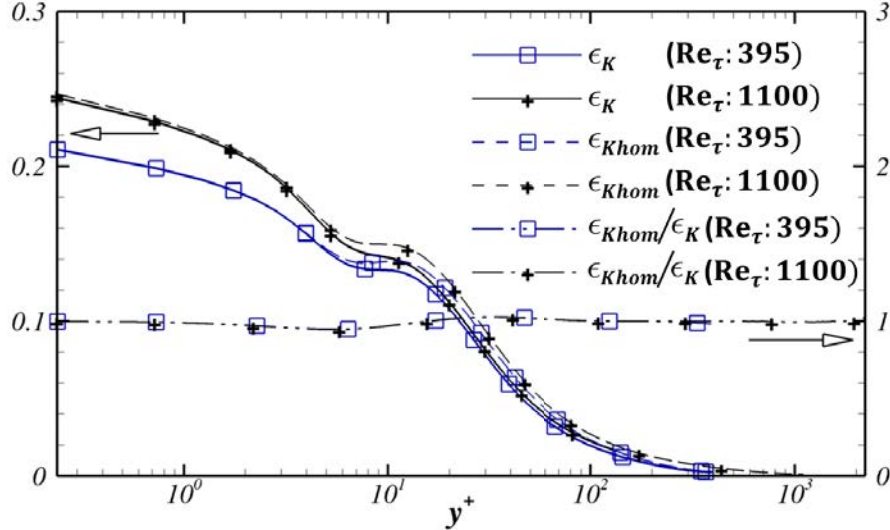


FIGURE 7.19 – Distribution de  $\epsilon_K$ ,  $\epsilon_{Khom}$  et du rapport  $\epsilon_{Khom}/\epsilon_K$  à  $Re_\tau = 395$  et à  $Re_\tau = 1100$

L'hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement (invariance de l'écoulement par rotation autour d'un axe privilégié) permet d'aboutir à une forme très simplifiée de la dissipation en exprimant les dérivées de la relation 7.5 les unes par rapport aux

autres. Dans le cas d'une axisymétrie selon la direction  $x$ , on peut montrer que les dérivées de vitesse sont liées par les relations :

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2} \\
 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2} \\
 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2} \\
 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} &= \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2} \\
 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2} &= \frac{1}{3} \left[ \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Les termes de corrélation entre les dérivées de vitesse de la relation 7.5 s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial y} &= \frac{1}{6} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} - \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} \\
 \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Le détail des calculs permettant de dériver les équations 7.6 et 7.7 à partir de l'hypothèse d'axisymétrie est donné dans l'étude de Georges et al. [88]. L'utilisation des ces relations permet de construire deux approximations différentes comportant chacune quatre termes seulement [88] :

$$\epsilon_{Kax1} = \nu \left[ -\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2} + 8\overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2} \right] \tag{7.8}$$

$$\epsilon_{Kax2} = \nu \left[ \frac{5}{3} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2} + \frac{8}{3} \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}\right)^2} \right] \tag{7.9}$$

L'hypothèse la plus restrictive consiste à considérer l'écoulement comme isotrope. Les statistiques sont alors indépendantes des directions considérées et les dérivées de l'équation 7.5 sont strictement égales. La dissipation est alors simplement définie

par :

$$\epsilon_{Kiso} = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} \quad (7.10)$$

Enfin, dans la sous-couche visqueuse, les termes  $\overline{(\partial u'/\partial y)^2}$  et  $\overline{(\partial w'/\partial y)^2}$  sont prédominants et  $\overline{(\partial w'/\partial y)^2} \approx \frac{1}{4}\overline{(\partial u'/\partial y)^2}$  d'après Antonia et al. [87]. La dissipation peut alors être approximée par :

$$\epsilon_{Kw} = \frac{5}{4}\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2} \quad (7.11)$$

La figure 7.20 présente les profils fournis par les approximations axisymétriques  $\epsilon_{Kax1}$  et  $\epsilon_{Kax2}$ , l'approximation isotrope  $\epsilon_{Kiso}$  ainsi que par l'approximation pour la sous-couche visqueuse  $\epsilon_{Kw}$  normalisés par rapport à la dissipation exacte pour  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . Il est intéressant de noter que la relation 7.10 constitue une bonne estimation pour  $y^+ > 100$  malgré l'hypothèse d'isotropie sur laquelle elle repose, a priori inadaptée au cas d'un écoulement en canal. En deçà, l'utilisation des approximations axisymétriques  $\epsilon_{Kax1}$  et  $\epsilon_{Kax2}$ , plus complexes, est nécessaire, ces dernières fournissant une estimation satisfaisante de la dissipation à partir de  $y^+ > 20$  pour  $\epsilon_{Kax1}$  et  $y^+ > 40$  pour  $\epsilon_{Kax2}$ . L'approximation  $\epsilon_{Kw}$  permet d'obtenir une bonne estimation de la dissipation dans la sous-couche visqueuse mais voit sa précision diminuer sensiblement au-delà de  $y^+ = 10$ . Enfin, les courbes de la figure 7.20 sont similaires à celles présentées par Antonia [87] pour des nombres de Reynolds inférieurs. La qualité des approximations semble donc peu affectée par l'augmentation du nombre de Reynolds.

## 9 Signature et caractérisation des structures tourbillonnaires dans la sous-couche tampon

La figure 7.21 présente les coupes des fluctuations  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  et  $-u'v'$  dans le plan  $(x, z)$  à  $y^+ = 10$ . La zone couverte s'étend sur  $2700$  et  $2870\delta_\nu$  dans les directions longitudinales et transverses. Les fluctuations de la vitesse longitudinale dessinent clairement une alternance de stries de basse vitesse (zones blanches) et de haute vitesse (zones noires). Cette alternance de stries est une caractéristique fondamentale de la couche interne qui s'explique par l'effet de pompage des tourbillons quasi-longitudinaux (TQL) qui coté balayage font descendre des portions de fluide de vitesse supérieure à la vitesse locale et coté éjection font remonter des portions de fluide depuis la paroi et induisent donc des fluctuations de vitesse longitudinale

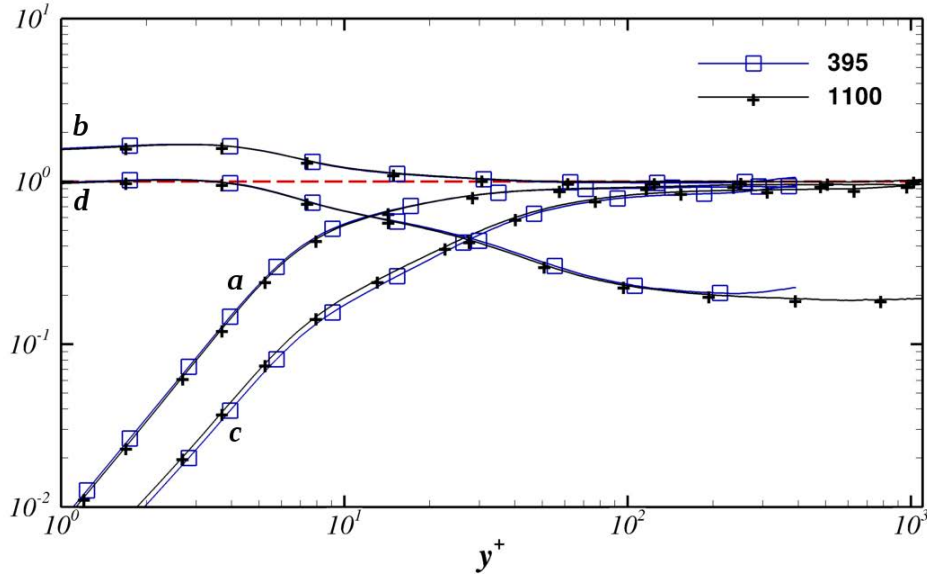


FIGURE 7.20 – Distribution de  $\epsilon_{Kax1}/\epsilon_K$  (a),  $\epsilon_{Kax2}/\epsilon_K$  (b),  $\epsilon_{Kiso}/\epsilon_K$  (c) et  $\epsilon_{Kw}/\epsilon_K$  (d) pour  $Re_\tau = 395$  et à  $Re_\tau = 1100$

négatives. Ce mécanisme est décrit plus en détail dans le chapitre 6. Il est intéressant de noter que les fluctuations  $v'$  et  $-u'v'$  sont beaucoup plus éparées et sont moins allongées que les fluctuations  $u'$ . Une explication plausible pourrait être que la vitesse normale impulsée par les TQL atteint sa valeur maximale au niveau des TQL et diminue rapidement au fur et à mesure que les portions de fluide déplacées s'en éloignent. Les stries comportent donc des portions de fluide ayant une vitesse longitudinale différente de la vitesse locale, car pompées par les TQL, mais qui ont le plus souvent terminé leur phase de descente ou de montée et ne sont pas associées à des fluctuations de vitesse normale. Ces dernières ont ainsi une portée beaucoup plus limitée que les fluctuations longitudinales et traduisent la présence de TQL dans l'environnement immédiat du plan de coupe.

On se propose à présent d'étudier les caractéristiques des stries et des structures associées à partir des corrélations de la vitesse. Il est en effet difficile d'avoir une idée précise de la longueur et de l'espace entre les stries à travers les fluctuations montrées dans la figure 7.21, ces caractéristiques pouvant varier fortement d'une strie à l'autre. Les statistiques de corrélation transversale à deux points fournissent de précieuses informations sur les propriétés moyennes des stries et, par extension, des TQL qui les engendrent. La corrélation de la composante  $u_i$  de la vitesse dans

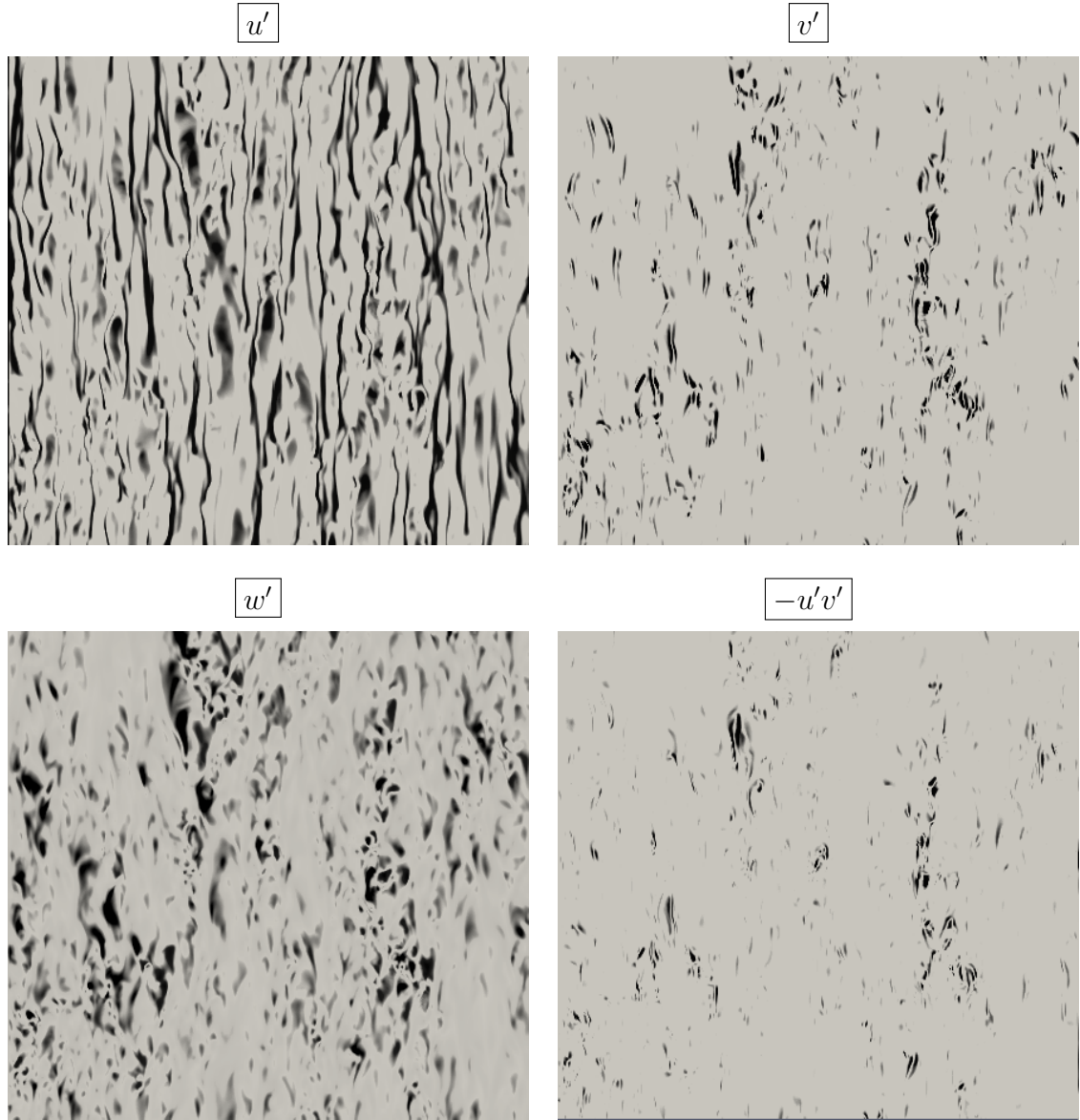


FIGURE 7.21 – Fluctuations  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  et  $-u'v'$  dans le plan  $(x, z)$  parallèle aux parois à  $y^+ = 10$  dans le cas  $Re_\tau = 1100$

la direction transversale est donnée par :

$$R_{u'_i u'_i}(y, \Delta z) = \langle r_{u'_i u'_i}(y, z_0, \Delta z) \rangle_{z_0} = \left\langle \frac{\langle u'_i(x, y, z_0) u'_i(x, y, z_0 + \Delta z) \rangle_x}{\langle u'^2_i(x, y, z_0) \rangle_x} \right\rangle_{z_0} \quad (7.12)$$

où  $r_{u'_i u'_i}$  est la corrélation des fluctuations  $u'_i u'_i$  en  $z = z_0 + \Delta z$  par rapport au point  $z = z_0$ . Les corrélations transverses peuvent être interprétées à travers le cas idéalisé illustré dans la figure 7.22 dans lequel une strie basse et haute vitesse sont créées par l'alternance de trois structures longitudinales contrarotatives. La corrélation  $R_{u' u'}$  de vitesse longitudinale  $u' = u'_1$  permet de déterminer la largeur moyenne des stries  $\mathcal{L}_z$ , le passage d'une strie négative en  $z_0$  (A) à une strie positive (et inversement) en  $z_0 + \mathcal{L}_z$  (B) correspondant à la présence d'un pic de corrélation négative en  $\Delta z = \mathcal{L}_z$ . Le premier pic de corrélation négative de  $R_{w' w'}$  correspond à la distance EF, pour laquelle le signe de  $w'$  s'inverse, et peut également être interprété comme la largeur des stries. Enfin, la corrélation  $R_{v' v'}$  de la vitesse normale permet de déterminer le diamètre moyen  $\mathcal{D}$  des structures associées aux stries. Le passage du côté balayage de la structure (C :  $v' > 0$ ) au côté éjection (D :  $v' < 0$ ) se traduit par la présence d'un pic négatif à  $\Delta z = \mathcal{D}$ .

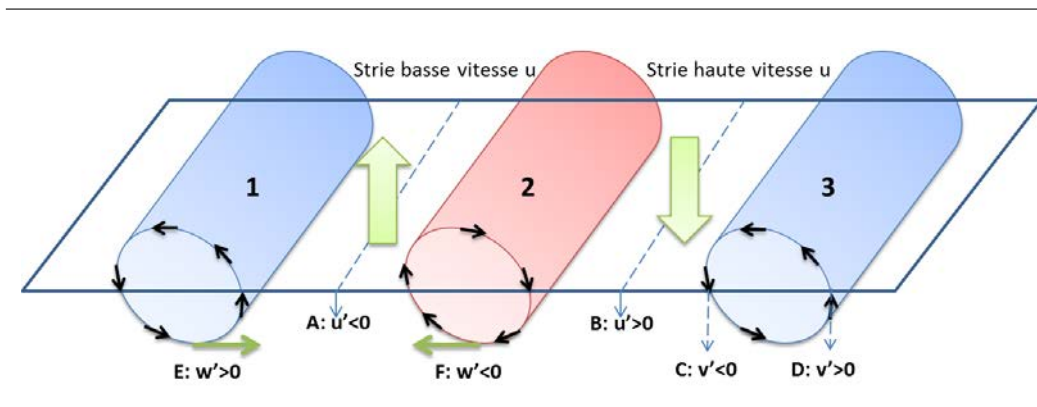


FIGURE 7.22 – Création d'une strie basse et haute vitesse par trois structures contrarotatives. Les tourbillons 1 et 2 éjectent le fluide depuis les parois vers l'intérieur du canal et engendrent une strie de fluctuation négative de la vitesse longitudinale ( $u' < 0$ ). Les tourbillons 2 et 3 amènent le fluide de l'intérieur du canal vers les parois et engendrent une strie ( $u' > 0$ )

Les fluctuations induites par les TQL ne constituent qu'une partie des fluctuations et coexistent, par exemple, avec les fluctuations produites par les grandes structures. L'étude des TQL à travers les corrélations  $R_{u'_i u'_i}$  demande donc de « net-

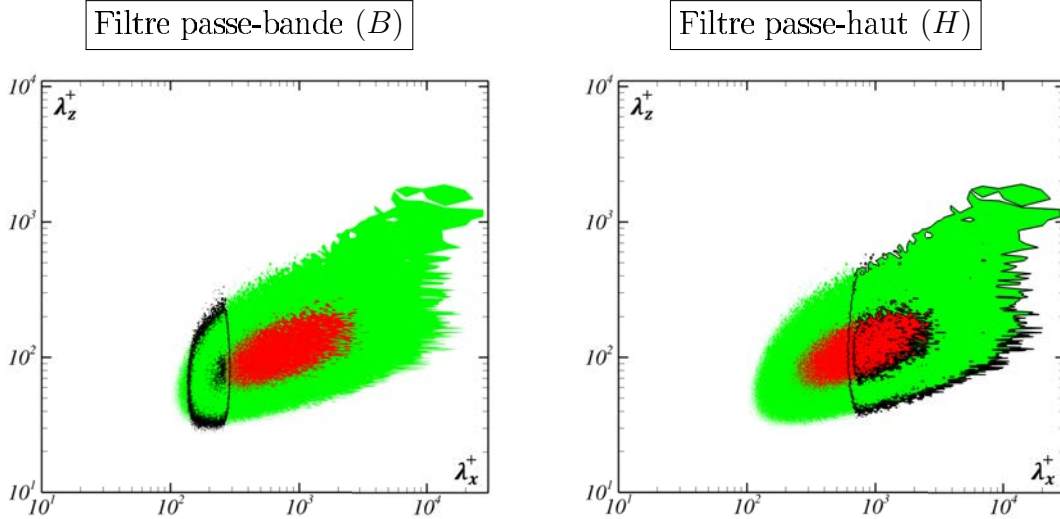
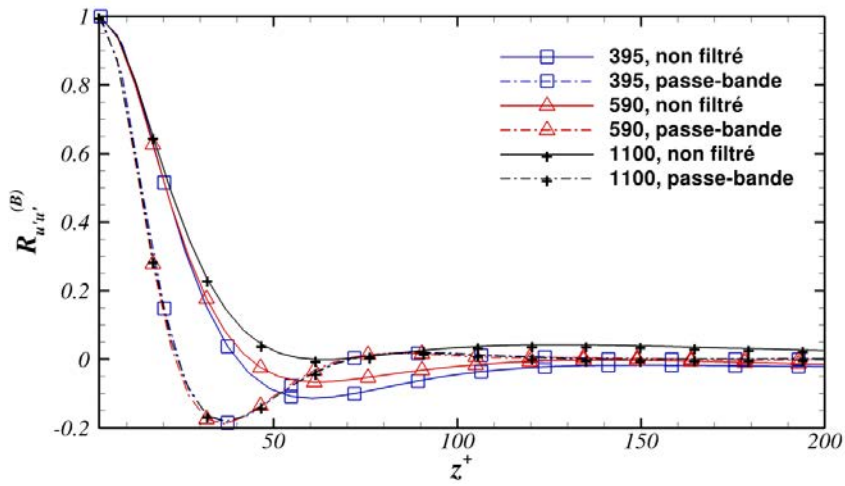


FIGURE 7.23 – Densités spectrales pré-multipliées  $k_x^+ k_z^+ E_{u'u'}$  des champs filtrés superposées aux spectres des champs non filtrés en  $y^+ = 10$  et  $Re_\tau = 1100$ . Les contours et les zones coloriées correspondent respectivement aux spectres des champs filtrés et non filtrés.

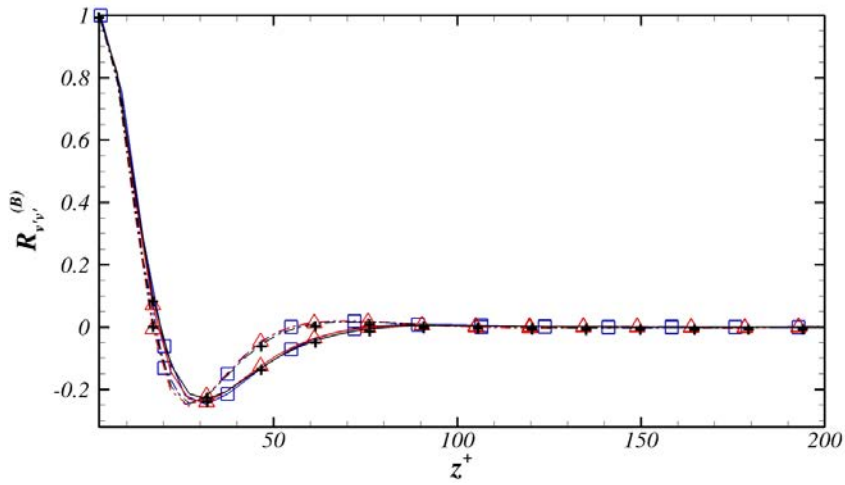
toyer » le champ de vitesse de ces fluctuations indésirables. L'approche retenue ici est une adaptation de l'approche expérimentale d'analyse des signaux temporels des fluctuations de vitesse de Naguib et al. [54] qui était alors basée sur le filtrage en temps des signaux de fluctuations de façon à isoler les fluctuations dont la fréquence correspond aux fréquences caractéristiques des TQL. On procède ici par application d'un filtre spatial passe-bande de type Butterworth (d'ordre 4) de façon à sélectionner les fluctuations dont la longueur est comprise entre  $\mathcal{L}_x^+ = 160$  et  $\mathcal{L}_x^+ = 300$ , correspondant approximativement à l'étendue des TQL. Les corrélations des champs filtrés par un filtre passe-haut ne laissant passer que les fluctuations d'échelle large ou intermédiaire ( $\mathcal{L}_x > \frac{2h}{3}$ ) ont également été considérées à titre de comparaison. La figure 7.23 montre les densités spectrales des fluctuations de vitesse obtenues après application du filtre passe-bande et après application du filtre passe-haut. Par la suite, les corrélations obtenues avec le filtre passe-bande et le filtre passe-haut seront notées respectivement  $R^{(B)}$  et  $R^{(H)}$ .

La figure 7.24 présente les corrélations  $R_{u'u'}$ ,  $R_{v'v'}$  et  $R_{w'w'}$  pour  $Re_\tau = 395, 590$  et 1100 obtenues avec le filtre passe-bande (à gauche) et le filtre passe-haut (à droite) à  $y^+ = 10$ . Les corrélations sont comparées avec le cas non filtré. La coïncidence des corrélations « passe-bande » des différents nombres de Reynolds est excellente et

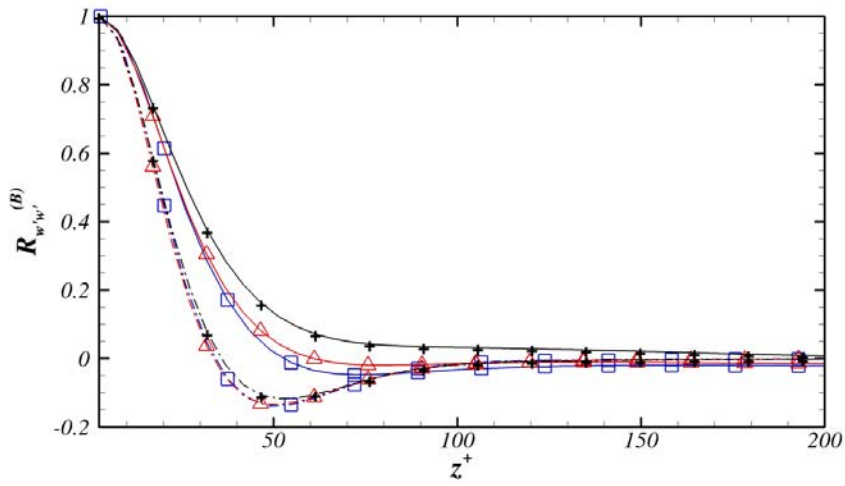




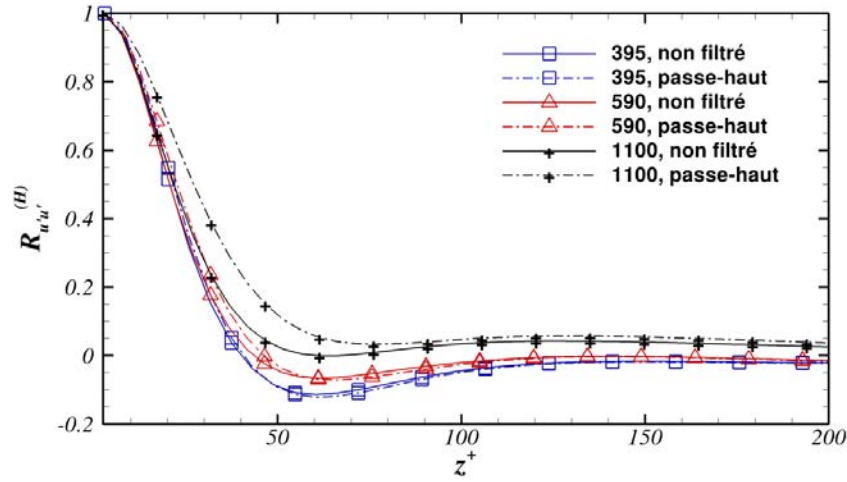
(a)  $R_{u'u'}$  avec le filtre passe-bande



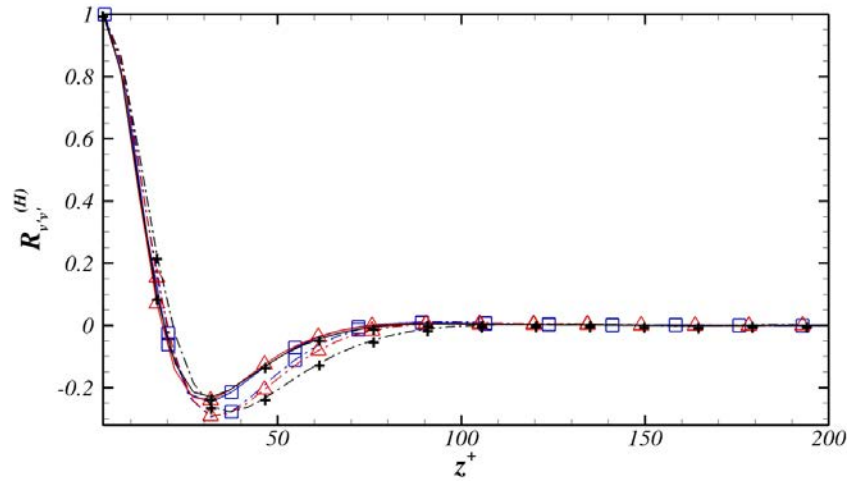
(b)  $R_{v'v'}$  avec le filtre passe-bande



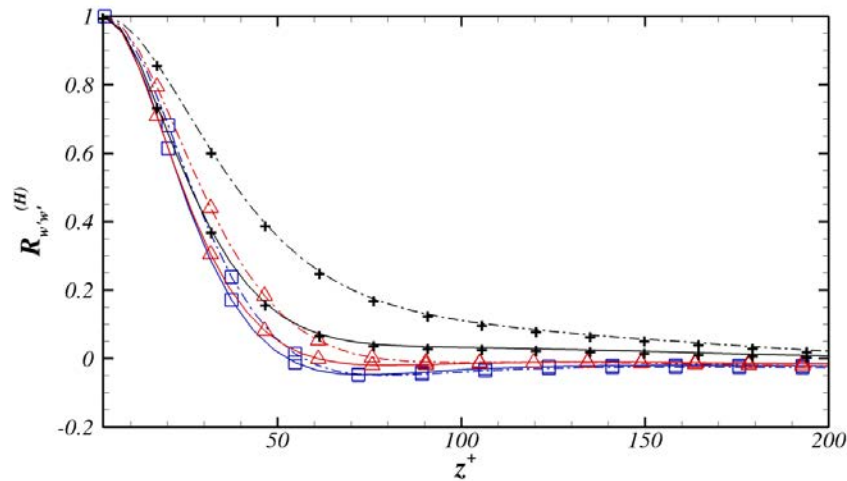
(c)  $R_{w'w'}$  avec le filtre passe-bande



(d)  $R_{u'u'}$  avec le filtre passe-haut



(e)  $R_{v'v'}$  avec le filtre passe-haut



(f)  $R_{w'w'}$  avec le filtre passe-haut

FIGURE 7.24 – Corrélations transversales  $R_{u'u'}$ ,  $R_{v'v'}$  et  $R_{w'w'}$  entre les fluctuations de vitesse  $z$  et en  $z + \Delta z$  en fonction de  $\Delta z^+$  pour  $Re_\tau = 395, 590$  et  $1100$  et à  $y^+ = 10$

démontre la pertinence des échelles internes pour la description des structures tourbillonnaires. A l'inverse, les échelles internes sont inadaptées aux grandes structures comme en témoigne la forte dépendance des profils de corrélation obtenus avec le filtre passe-haut. La courbe de corrélation  $R_{v'v'}^{(B)}$  permet d'évaluer le diamètre moyen des structures tourbillonnaire à  $\mathcal{D}^+ \approx 25$ . Il est intéressant de remarquer que la taille des stries déduite de la position du pic négatif de  $R_{w'w'}$  ( $\mathcal{L}_z^+ = 50$ ) est différente de celle correspondant au pic négatif de  $R_{u'u'}$  ( $\mathcal{L}_z^+ \approx 35$ ). Cette contradiction apparente s'explique probablement par le fait que l'application d'un même filtre pour les champs de fluctuation  $u'$  et  $w'$  ne sélectionne pas les mêmes structures. La figure 7.21 montre en effet que les structures tourbillonnaires ont une signature beaucoup moins allongée sur les fluctuations  $w'$  du plan  $(x-z)$  que sur les fluctuations  $u'$ . Les fluctuations  $w'$  correspondent donc à des structures de longueur plus élevée tandis que les fluctuations de  $u'$  sont de longueur similaire à celle des structures associées. La sélection des fluctuations de vitesse  $u'$  de longueur  $140 < \mathcal{L}_x^+ < 300$  revient à sélectionner les structures cohérentes de taille équivalente tandis que la sélection des fluctuations  $w'$  de longueur  $140 < \mathcal{L}_x^+ < 300$  englobe également des structures de longueur  $\mathcal{L}_x^+ > 300$ . La taille moyenne donnée par  $R_{w'w'}$  porte donc sur un ensemble plus large de stries que pour celle donnée par la corrélation  $R_{u'u'}$ . La valeur  $\mathcal{L}_z^+ = 50$  peut être considérée comme étant plus représentative et correspond d'ailleurs aux tailles mesurées expérimentalement par [89, 90].

Enfin, l'effet des structures sur la dynamique de la turbulence pariétale peut être étudié en considérant la corrélation entre la contrainte à  $y = 0$  et les valeurs des fluctuations de vitesse en  $y$  :

$$R_{u'_i\tau'}(y, \Delta z) = \left\langle \frac{\langle \tau'(x, y=0, z_0) u'_i(x, y, z_0 + \Delta z) \rangle_x}{\langle \tau'(x, y=0, z_0)^2 \rangle_x \langle u'_i(x, y, z_0)^2 \rangle_x} \right\rangle_{z_0} \quad (7.13)$$

La figure 7.25 montre les corrélations  $R_{u'\tau'}$ ,  $R_{v'\tau'}$  et  $R_{w'\tau'}$  obtenues avec le filtre passe-bande et le filtre passe-haut pour  $Re_\tau = 395, 590$  et  $1100$  à  $y^+ = 10$ . On retrouve là encore une forte dépendance des corrélations  $R_{u'_i\tau'}^{(H)}$  avec le nombre de Reynolds tandis que les corrélations  $R_{u'_i\tau'}^{(B)}$  coïncident parfaitement bien entre elles et sont donc correctement décrites par les échelles internes. Le taux de corrélation en  $\Delta z = 0$  est beaucoup plus élevé pour les corrélations  $R_{u'_i\tau'}^{(H)}$  et traduit une bonne pénétration des grandes structures dans la couche interne. Inversement, les taux de corrélation  $R_{u'_i\tau'}^{(B)}$  réduits montrent que les structures tourbillonnaires semblent avoir un effet limité à proximité de la paroi. Ces résultats montrent que les grandes struc-

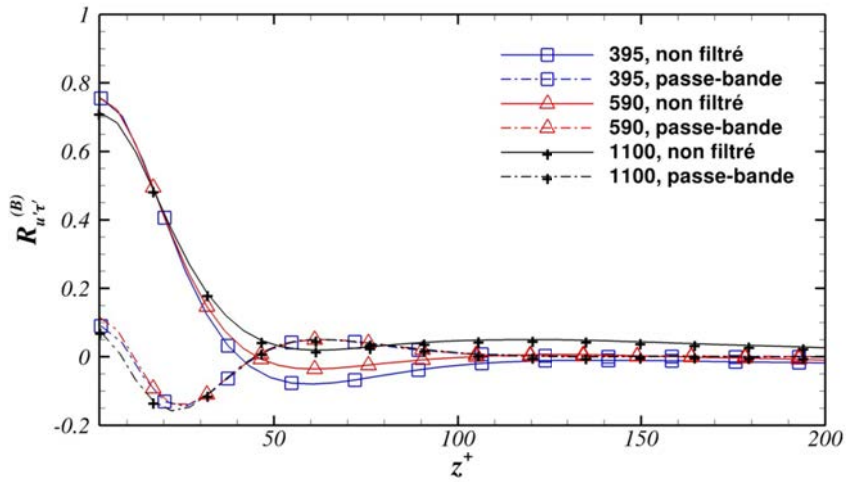
tures peuvent jouer un rôle important sur les fluctuations de vitesse à proximité immédiate des parois et sont parfaitement conformes avec l'hypothèse des structures attachées de Townsend [4] selon laquelle les grandes structures de l'écoulement restent liées à la paroi tout au long de leur évolution. Cette influence des grandes structures jusqu'à la paroi permet par ailleurs d'expliquer l'échec des échelles internes à décrire les fluctuations de  $u'$  et  $w'$ . Enfin, on remarquera que le premier pic négatif de  $R_{u'\tau'}^{(B)}$  en  $\Delta z^+ \approx 25$  correspond à des stries de taille moyenne  $\mathcal{L}_z^+ \approx 25$ , significativement plus petite que celle déduite des corrélations  $R_{u'u'}^{(B)}$  ( $\mathcal{L}_z^+ \approx 35$ ) et  $R_{w'w'}^{(B)}$  ( $\mathcal{L}_z^+ = 50$ ). Il convient cependant de préciser que les corrélations  $R_{u'\tau'}^{(B)}$  ne concernent que structures dont l'effet est perceptible à la paroi, et constituent donc un sous-ensemble des structures couvertes par  $R_{u'u'}^{(B)}$ . Les corrélations  $R_{u'u'}^{(B)}$  sont de ce point de vue plus pertinentes, car plus représentatives de l'ensemble des stries et des TQL opérant en  $y^+ = 10$ .

## 10 Conclusions

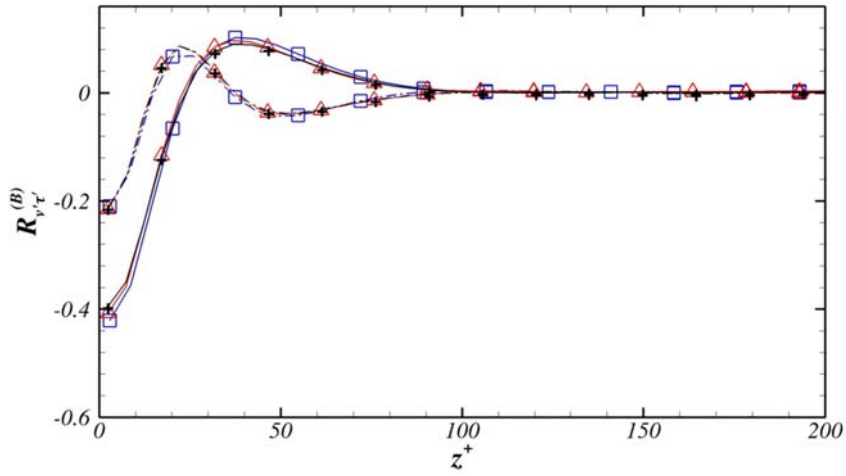
La plupart des statistiques présentées dans ce chapitre comportent une dépendance avec le nombre de Reynolds dans l'ensemble du canal lorsqu'elles sont exprimées dans les jeux d'échelles internes/externes classiques. L'insuffisance des échelles internes à décrire complètement l'écoulement à proximité des parois est une caractéristique connue de la turbulence de parois et est d'ailleurs expliquée par les modèles théoriques de la turbulence à travers la notion de structures actives et passives développée au cours du chapitre précédent. La comparaison des résultats de simulation avec la théorie a permis de confirmer la pertinence de ces modèles pour les statistiques simples de l'écoulement.

La dépendance des contraintes  $\overline{u'u'}$  et  $\overline{w'w'}$  et l'invariance de  $\overline{v'v'}$  avec le nombre de Reynolds dans la couche interne est parfaitement conforme avec le modèle de Townsend [4] selon lequel les fluctuations de vitesse normale  $v'$  sont générées essentiellement par des structures tourbillonnaires actives de taille intermédiaire, contrôlées par les échelles internes, tandis que les fluctuations  $u'$  et  $w'$  sont également induites par des structures de grande taille dépendantes des échelles externes. L'étude spectrale des fluctuations de vitesse a permis d'observer la signature des grandes échelles à travers l'existence d'une excroissance vers les longueurs d'onde élevées dans les spectres des fluctuations  $u'$  et  $w'$ .

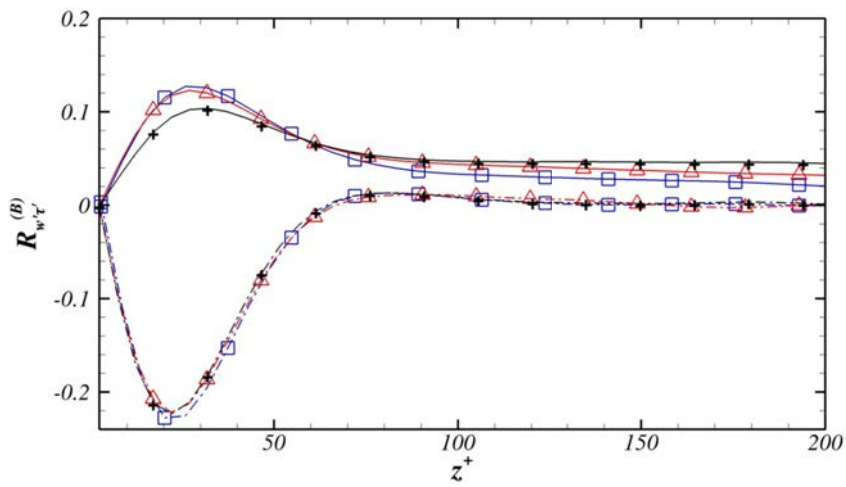
L'analyse des équations de transport a par ailleurs permis de confirmer la perti-



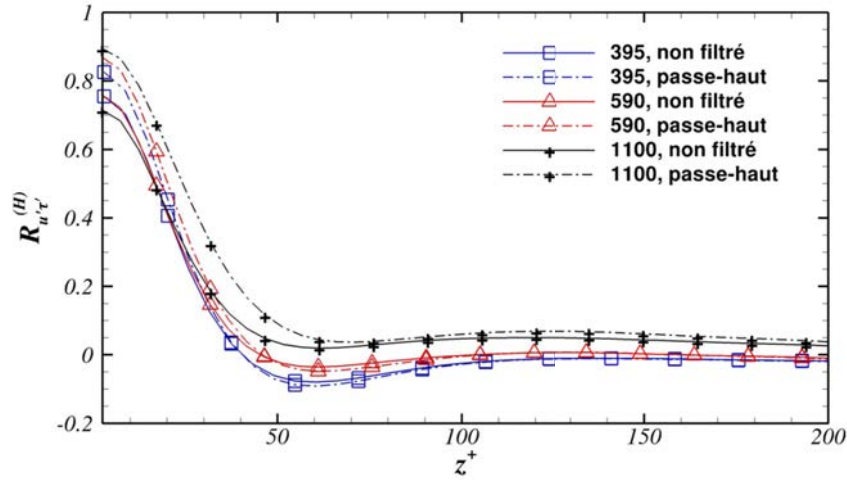
(a)  $R_{u'\tau'}$  avec le filtre passe-bande



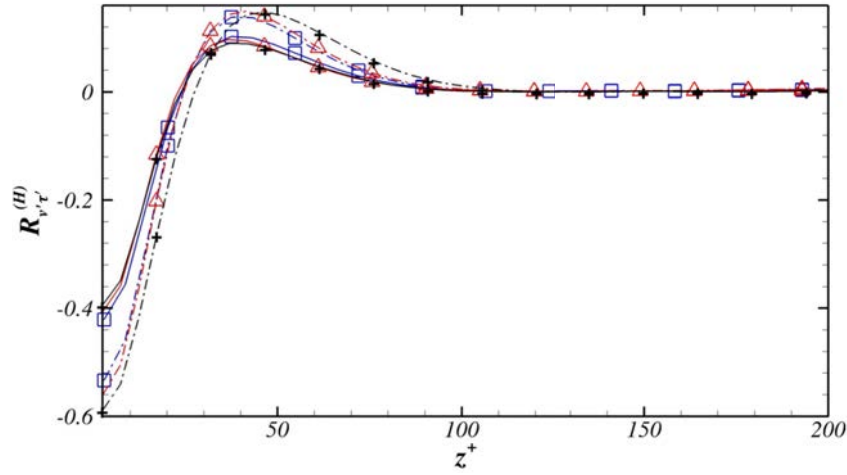
(b)  $R_{v'\tau'}$  avec le filtre passe-bande



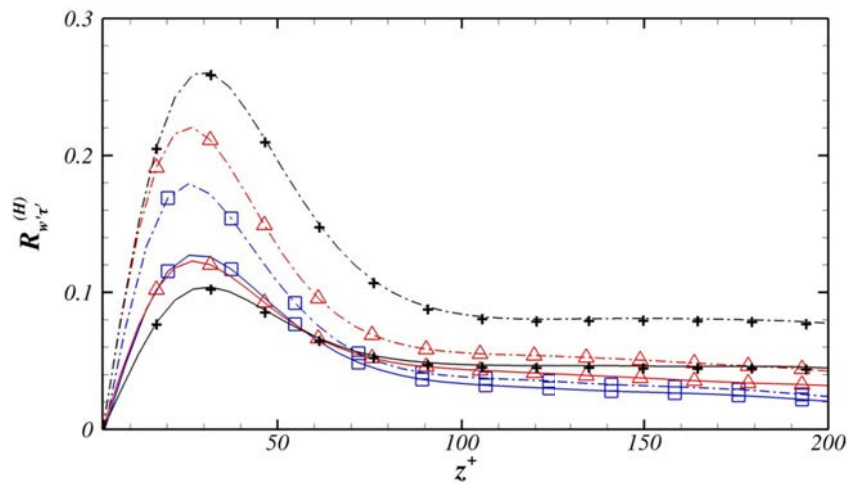
(c)  $R_{w'\tau'}$  avec le filtre passe-bande



(d)  $R_{u'\tau'}$  avec le filtre passe-haut



(e)  $R_{v'\tau'}$  avec le filtre passe-haut



(f)  $R_{w'\tau'}$  avec le filtre passe-haut

FIGURE 7.25 – Corrélations transversales  $R_{u'\tau'}$ ,  $R_{v'\tau'}$  et  $R_{w'\tau'}$  entre les fluctuations de la contrainte pariétale en  $(y = 0, z)$  et les fluctuations de vitesse en  $(y = 10\delta_\nu, z + \Delta z)$  en fonction de  $\Delta z^+$  pour  $Re_\tau = 395, 590$  et  $1100$

nence de l'échelle  $\frac{u_\tau^3}{y}$ , proposée par Hoyas et al. [80], dans la couche de recouvrement.

La vitesse moyenne est une des rares statistiques à être complètement indépendante des échelles externes dans la couche interne et est parfaitement bien décrite par la loi linéaire  $U^+ = y^+$  à proximité immédiate de la paroi. Dans la zone de recouvrement, l'étude des fonctions de diagnostic a montré la conformité des profils obtenus avec la loi de puissance tandis que les lois logarithmiques échouent à offrir une description complètement satisfaisante du profil de vitesse moyenne. Il est cependant important de préciser que les nombres de Reynolds considérés ici sont relativement modérés et inférieurs aux hypothèses sur lesquelles s'appuient ces deux lois. Notamment, les conditions de validité de la loi logarithmique ne sont clairement pas atteintes et il n'est pas exclu que cette loi donne de meilleurs résultats avec des nombres de Reynolds plus élevés. Le maximum de la contrainte  $-\overline{u'v'}$  dans la couche de recouvrement est par ailleurs tout à fait conforme à la relation 7.1 proposée par Panton [75] qui aboutit aux hypothèses de la loi logarithmique pour les très grands nombres de Reynolds ( $-\overline{u'^+v'^+} = 1$ , lorsque  $Re_\tau \rightarrow \infty$ ).

Enfin, ce chapitre propose également quelques études originales, qui n'avaient pas été menées auparavant en simulation numérique directe pour ces nombres de Reynolds. L'étude expérimentale de Naguib et al. [54], basée sur les corrélations des signaux temporels filtrés des fluctuations de vitesse, a été adaptée dans le plan  $(x, z)$  afin de déterminer la taille et l'espacement entre les structures tourbillonnaires de l'écoulement. Le diamètre des structures ( $\mathcal{D}^+ = 25$ ) et leur espacement moyen ( $L_x^+ = 50$ ) déduits de la position des pics de corrélation sont conformes aux valeurs obtenues précédemment dans la littérature [89, 90]. Enfin, les différentes approximations du terme de dissipation utilisées dans les études expérimentales ont été comparées avec les résultats de simulations afin d'évaluer leur degré de validité. Ces approximations s'avèrent suffisamment précises dans leurs domaines d'application respectifs tandis que leur faible sensibilité aux nombres de Reynolds étudiés autorise a priori leur utilisation pour des nombres de Reynolds plus élevés.

# Chapitre 8

## Etude statistique de la vorticité

### 1 Introduction

La vorticité du champ de vitesse est étroitement liée à la structure et à l'organisation de la turbulence dans l'écoulement et est donc une caractéristique de première importance dans l'étude des écoulements turbulents. Notamment, les structures cohérentes   proximité de la paroi génèrent une grande partie de la vorticité du fait de leur nature tourbillonnaire et ont donc un effet sur les statistiques de cette dernière.

Bien que la précision élevée des simulations numériques directes permette d'envisager une étude approfondie du champ de vorticité, la plupart des études numériques menées à ce jour se concentrent essentiellement sur les statistiques du champ de vitesse. Ce chapitre se propose donc de présenter les statistiques réalisées sur le champ de vorticité pour les quatre nombres de Reynolds  tudi s. Nous nous intéresserons notamment à l'invariance remarquable des fluctuations de la composante normale de la vorticité avec le nombre de Reynolds qui n'a à ce jour pas été analysée.

### 2 Considérations générales

La vorticité  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  est définie comme le rotationnel du champ de vitesse :

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{8.1}$$



L'équation de transport de la vorticité s'obtient naturellement en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation de Navier-Stokes et s'écrit, en décomposant la vorticité en une composante moyenne  $\mathbf{\Omega}$  et une composante fluctuante  $\mathbf{\omega}'$  :

$$\frac{\mathcal{D}(\Omega_i + \omega'_i)}{\mathcal{D}t} = \underbrace{(\Omega_j + \omega'_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\mathcal{P}_{\omega_i}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (\Omega_i + \omega'_i)}_{D_{\omega_i}} \quad (8.2)$$

où  $\mathcal{P}_{\omega_i}$  et  $D_{\omega_i}$  désignent respectivement les termes de production et de diffusion de la composante  $\omega_i$  de la vorticité. On notera que dans le cas d'un écoulement en canal, homogène dans les directions  $x$  et  $z$ , la vorticité moyenne est nulle dans les directions  $x$  et  $y$  et résulte simplement en  $\mathbf{\Omega} = \Omega_z = -\frac{\partial U}{\partial y}$ .

La vorticité longitudinale est étroitement liée aux structures tourbillonnaires quasi-longitudinales, prédominantes dans la couche interne et mérite une attention particulière, en raison de la place centrale de ces dernières dans la génération de la turbulence. Le terme de production locale de la composante longitudinale s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\omega_x} = \mathcal{P}_{\omega_x}^{(1)} + \mathcal{P}_{\omega_x}^{(2)} + \mathcal{P}_{\omega_x}^{(3)} = \omega_x \frac{\partial u'}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial (U + u')}{\partial y} + (\Omega_z + \omega'_z) \frac{\partial u'}{\partial z} \quad (8.3)$$

La figure 8.1 propose une illustration des différentes contributions  $\mathcal{P}_{\omega_x}^{(i)}$  au terme de production. Les termes  $\mathcal{P}_{\omega_x}^{(2)}$  et  $\mathcal{P}_{\omega_x}^{(3)}$  représentent la création de vorticité longitudinale par inclinaison des lignes de vorticité normale et transverse sous l'effet du gradient de vitesse  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Le terme  $\mathcal{P}_{\omega_x}^{(1)}$  traduit l'intensification de  $\omega_x$  par étirement des lignes de vorticité sous l'effet d'une accélération locale de la vitesse longitudinale comme illustré dans la figure 8.1. Ce phénomène, plus difficile à appréhender intuitivement, est une conséquence directe du théorème de Kelvin qui s'écrit :

$$\frac{\mathcal{D}\Gamma}{\mathcal{D}t} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{u} d\mathbf{r} = \iint_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \nu \Delta \mathbf{u} d\mathbf{r} \quad (8.4)$$

où  $\Gamma$  représente la circulation autour d'un contour fermé  $\mathcal{C}$  et  $S$  la surface délimitée par  $\mathcal{C}$ . Dans le cas d'un écoulement non visqueux ( $\nu = 0$ ), la circulation du champ de vitesse sur le contour  $\mathcal{C}$  est conservée et la réduction de la surface  $S$  par étirement se traduit alors par une augmentation de la vorticité normale à la surface.

Une analyse d'ordre de grandeur permet de montrer que le terme  $\mathcal{P}_{\omega_x}^{(2)}$  est prédominant et que la vorticité longitudinale est essentiellement produite par inclinaison de la vorticité normale  $\omega_y$ . La production instantanée et locale de la vorticité normale

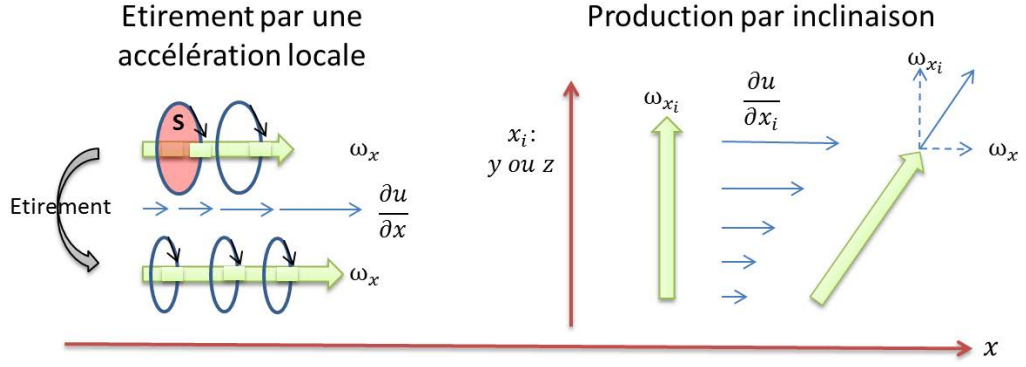


FIGURE 8.1 – Mécanismes de production de la vorticité longitudinale

s'exprime par :

$$\mathcal{P}_{\omega_y} = \mathcal{P}_{\omega_y}^{(1)} + \mathcal{P}_{\omega_y}^{(2)} + \mathcal{P}_{\omega_y}^{(3)} = \omega_x \frac{\partial v'}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v'}{\partial y} + (\Omega_z + \omega'_z) \frac{\partial v'}{\partial z} \quad (8.5)$$

Le terme  $\mathcal{P}_{\omega_y}^{(3)}$  est prédominant en raison de la valeur importante de la vorticité transverse aux parois ( $\Omega_z^+(y^+ = 0) = -\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = -1$ ). Ces considérations suggèrent que la vorticité longitudinale est en partie créée à partir de  $\omega_y$  et  $\omega_z$  selon le processus décrit par Tardu [86] et illustré dans la figure 8.2. La production de vorticité normale  $\omega_y$  est dans un premier temps assurée par le soulèvement des lignes de vorticité transverse  $\omega_z$  sous l'effet des variations de vitesse normale. La vorticité longitudinale est ensuite produite par inclinaison des lignes de vorticité normale sous l'effet du gradient de vitesse  $\frac{\partial U}{\partial y}$  et peut alors s'enrouler pour former des tourbillons quasi-longitudinaux.

### 3 Intensités turbulentes

La figure 8.3 présente l'intensité turbulente des différentes composantes de la vorticité pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$ . On remarque la présence d'un minimum local en  $y^+ = 5$  pour la composante longitudinale de vorticité. Une explication plausible, avancée par [91], suggère que ce minimum est dû à la présence de tourbillons quasi-longitudinaux (TQL) qui généreraient un maximum local de la vitesse  $w$  entre la paroi et les TQL. Le minimum local de la vorticité longitudinale pourrait alors être expliqué par l'annulation de  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , principale composante de la vorticité longitudinale près de la paroi.

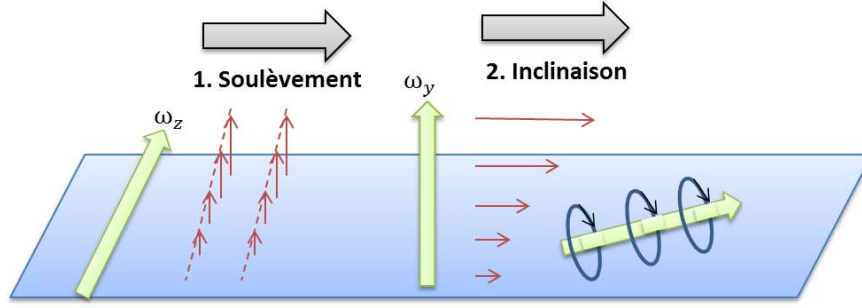


FIGURE 8.2 – Processus de production de vorticité longitudinale par soulèvement de la vorticité transverse puis inclinaison de la vorticité normale induite

Les composantes  $x$  et  $z$  présentent une forte dépendance avec le nombre de Reynolds, y compris à proximité immédiate de la paroi, qui traduit l'influence des échelles externes. Comme mentionné précédemment, les quantités  $\overline{\omega'_x \omega'_x}$  et  $\overline{\omega'_z \omega'_z}$    la paroi sont proportionnelles aux termes de pseudo-dissipation  $\tilde{\epsilon}_{33}$  et  $\tilde{\epsilon}_{11}$  et présentent donc la même dépendance. La nature exacte de cette dépendance peut être extrapolée à partir des récentes études [92, 93, 94] qui ont mis en évidence l'effet de modulation des grandes structures de la couche de recouvrement sur les fluctuations de vitesse dans la couche interne.

On commence tout d'abord par relier les fluctuations de vitesse et de vorticité   proximité de la paroi en considérant le comportement asymptotique des fluctuations de vitesse  $u'$  et  $w'$  :

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial u'}{\partial y} y + \mathcal{O}(y^2) \\ w' &= \frac{\partial w'}{\partial y} y + \mathcal{O}(y^2) \end{aligned}$$

Les fluctuations de vorticité peuvent alors être approximées par les contraintes  $\overline{u'u'}$  et  $\overline{w'w'}$  :

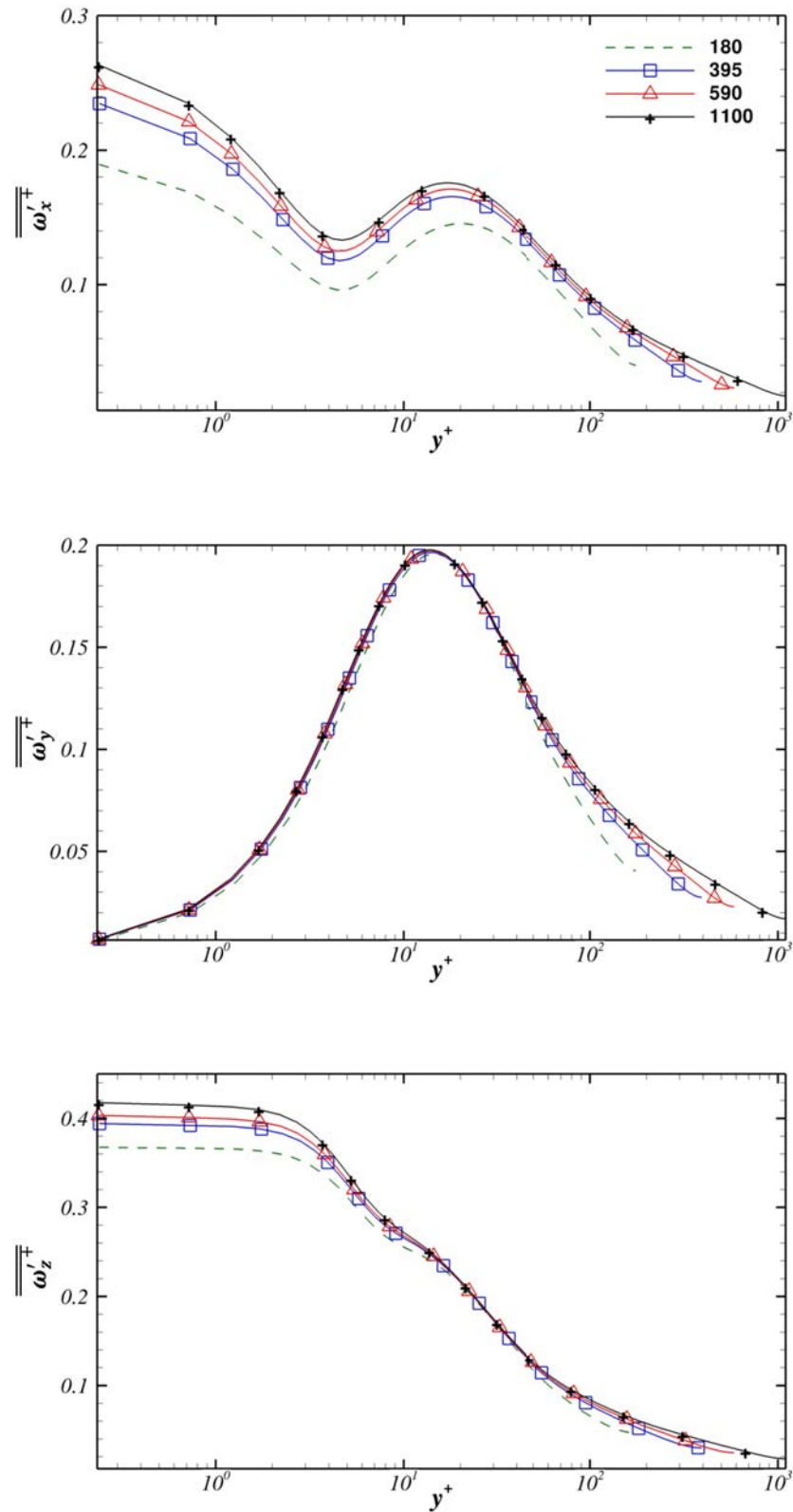


FIGURE 8.3 – Moyenne quadratique des fluctuations de vorticité pour  $Re_\tau = 180$ , 395, 590 et 1100

$$\begin{aligned}\overline{\omega'_x \omega'_x}|_{y=0} &= \overline{\frac{w' w'}{y^2}} \Big|_{y \rightarrow 0} \\ \overline{\omega'_z \omega'_z}|_{y=0} &= \overline{\frac{u' u'}{y^2}} \Big|_{y \rightarrow 0}\end{aligned}\tag{8.6}$$

L'intensité turbulente de la vitesse longitudinale intervenant dans la relation 8.6 peut être évaluée en considérant l'effet de modulation des grandes structures. La démarche suivie par Marusic [94] est de déterminer un signal  $u'_p$  analogue à celui des fluctuations de vitesse  $u'$  à partir d'une composante  $\tilde{u}'$  insensible aux grandes échelles et modulée par le signal  $u_{OM}$  associé aux grandes structures :

$$\begin{aligned}u_p^{'+}(y^+, t^+, Re_\tau) &= \tilde{u}^{'+}(y^+, t^+) [1 + \beta(y^+) u_{OM}^+(y_M^+, t^+, Re_\tau)] \\ &\quad + \alpha(y^+) u_{OM}^+(y_M^+, t^+, Re_\tau)\end{aligned}\tag{8.7}$$

où les fonctions  $\tilde{u}^{'+}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions universelles, indépendantes du nombre de Reynolds. La fonction  $\tilde{u}^{'+}$  correspond aux fluctuations générées localement par les petites structures et modulées par les fluctuations  $u_{OM}^+$  générées par les grandes structures au point médian nominal de la couche de recouvrement ( $y^+ = y_M^+$ ). Par définition, ces deux fonctions sont indépendantes les unes des autres et ne sont pas corrélées ( $\overline{\tilde{u}^{'+} u_{OM}^+} = 0$ ). L'utilisation combinée des relations 8.6 et 8.7 conduit à l'expression de l'intensité turbulente de  $\omega'_z$  à proximité de la paroi, associée au signal  $u_p^{'+}$  :

$$\overline{\omega_z^{'+} \omega_z^{'+}} = \frac{\overline{u_p^{'+2}}(y^+, t^+, Re_\tau)}{y^{+2}} = \frac{1}{y^{+2}} \left[ \overline{\tilde{u}^{'+2}}(y^+) + \overline{u_{OM}^{+2}}(y_M^+, Re_\tau) \left( \alpha^2 + \beta \overline{\tilde{u}^{'+2}}(y^+) \right) \right]\tag{8.8}$$

L'intensité turbulente  $\overline{u_{OM}^{+2}}$  associée aux grandes structures de l'écoulement (de taille comparable à  $h$ ) peut être déterminée en utilisant les relations 6.24, valables pour  $y/y_s \ll 1$ , et s'exprime sous la forme d'une loi logarithmique :

$$\overline{u_{OM}^{+2}} \propto \ln\left(\frac{y_M^+}{h^+}\right) \propto \ln\left(\frac{y_M^+}{Re_\tau}\right)\tag{8.9}$$

La position  $y_M^+$  du point nominal médian est donnée par une loi puissance de  $Re_\tau$  qui dépend des limites utilisées dans la définition de la couche de recouvrement.

Dans le cas où l'on considère que la couche de recouvrement s'étend de  $y^+ = 100$  à  $y^+ = 0.15Re_\tau$ ,  $y_M^+$  est définie par  $y_M^+ = 3.9Re_\tau^{1/2}$ . L'intensité turbulente de  $\omega'_z$  exprimée dans les échelles internes est donc gouvernée par une loi de dépendance logarithmique avec le nombre de Reynolds :

$$\overline{\omega'_z \omega'_z} = \frac{\overline{u_p'^2}(y^+, t^+, Re_\tau)}{y^{+2}} = A(y^+) + B(y^+) \overline{u_{OM}^{+2}} = A'(y^+) + B'(y^+) \ln(Re_\tau) \quad (8.10)$$

Bien que les études de Marusic portent uniquement sur la vitesse longitudinale, la vitesse transverse est structurellement similaire à la vitesse longitudinale et devrait également être modulée à la paroi par les grandes échelles de manière analogue à  $u$ . On peut donc s'attendre à une dépendance similaire pour  $\overline{\omega'_x \omega'_x}$ . Cette dépendance en  $\ln(Re_\tau)$  est relativement bien confirmée par la figure 7.15 montrant l'évolution de la pseudo-dissipation avec le nombre de Reynolds, où l'on remarque que les trois dernières valeurs sont alignées selon une droite. Ces observations portent sur un échantillon de nombres de Reynolds trop réduit et ne permettent évidemment pas de confirmer de manière définitive la dépendance en  $\ln(Re_\tau)$  supposée ici.

L'intensité turbulente de  $\omega'_y$  est indépendante du nombre de Reynolds dans la couche interne. Les courbes coïncident remarquablement bien jusqu'en  $y^+ = 60$  et diffèrent légèrement au-delà en raison de l'influence des échelles externes. Cette invariance des fluctuations de vorticité normale est une caractéristique connue de la turbulence de paroi que l'on retrouve, par exemple, dans les simulations numériques de Moser et al. [36]. La plupart des statistiques étudiées jusqu'à présent, et notamment les fluctuations  $u'$  et  $w'$  intervenant dans la définition de  $\omega'_y$ , sont sensibles aux échelles externes y compris dans la couche interne. Cette invariance quasiment parfaite de l'intensité turbulente de  $\omega'_y$  est donc surprenante et mérite une attention particulière.

L'intensité turbulente de la vorticité normale peut être décomposée en trois composantes :

$$\overline{\omega_y'^2} = \underbrace{\left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2}_A + \underbrace{\left( \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2}_B - \underbrace{2 \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial x}}_C \quad (8.11)$$

représentées dans la figure 8.4. La contribution  $A$  exprimée dans les échelles internes est insensible au nombre de Reynolds, à la différence des contributions  $B$  et  $C$  qui sont toutefois d'un ordre de grandeur inférieures. D'un point de vue physique, la prédominance du terme  $A$  est très certainement due au fait que la turbulence de la

couche interne est dominée par la présence des stries qui engendrent de fortes variations de la vitesse longitudinale dans la direction transverse. L'invariance du terme  $A$  et donc de la vorticité selon  $y$  pourrait alors s'expliquer par le caractère universel des stries dont la taille et l'espacement ne dépendent pas du nombre de Reynolds, comme discuté dans la section 9 du chapitre 7. Il est à noter que les contributions  $B$  et  $C$  augmentent sensiblement avec le nombre de Reynolds et devraient représenter une portion significative des fluctuations de vorticité normale pour des nombres de Reynolds plus élevés. L'invariance de  $\overline{\omega_y'^{+2}}$  observée ici n'est donc probablement pas une caractéristique universelle de la turbulence de paroi.

## 4 Transport de $\overline{\omega_i' \omega_i'}$

Comme mentionné précédemment, la plupart des études numériques se concentrent sur le champ de vitesse et il n'existe pas,    notre connaissance, de travaux présentant les différents termes intervenant dans le transport de l'enstrophie.

Le processus de production de vorticité longitudinale détaillé en introduction de ce chapitre fait intervenir des mécanismes différents selon la composante de vorticité considérée. La composante normale est générée à partir de la composante transverse par soulèvement puis est ensuite inclinée par le cisaillement moyen et partiellement convertie en vorticité longitudinale. On se propose ici d'étudier le transport des composantes  $\overline{\omega_i' \omega_i'}$  de l'enstrophie afin de discuter des différentes dynamiques de la vorticité.

L'obtention des équations de transport de  $\overline{\omega_i' \omega_i'}$  s'effectue en plusieurs étapes à partir de l'équation du champ de vitesse fluctuant. On commence par déterminer l'équation de transport de la composante fluctuante  $\omega_i'$  de la vorticité en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation 6.4 :

$$\frac{\partial \omega_i'}{\partial t} = \Omega_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \omega_k' \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \omega_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} - \overline{\omega_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} - u_k' \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_i' u_k'}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{\omega_i' u_k'}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i'}{\partial x_k \partial x_k} \quad (8.12)$$

Le produit de cette équation par  $\omega_i'$  conduit à l'équation de transport de  $\omega_i' \omega_i' / 2$  que l'on peut moyenner afin d'aboutir à l'équation de transport de  $\overline{\omega_i' \omega_i'} / 2$  :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\omega_i' \omega_i'}}{\partial t} = \mathcal{P}_{ii}^{(\omega)} + T_{ii}^{(\omega)} + D_{ii}^{(\omega)} - \epsilon_{ii}^{(\omega)} \quad (8.13)$$

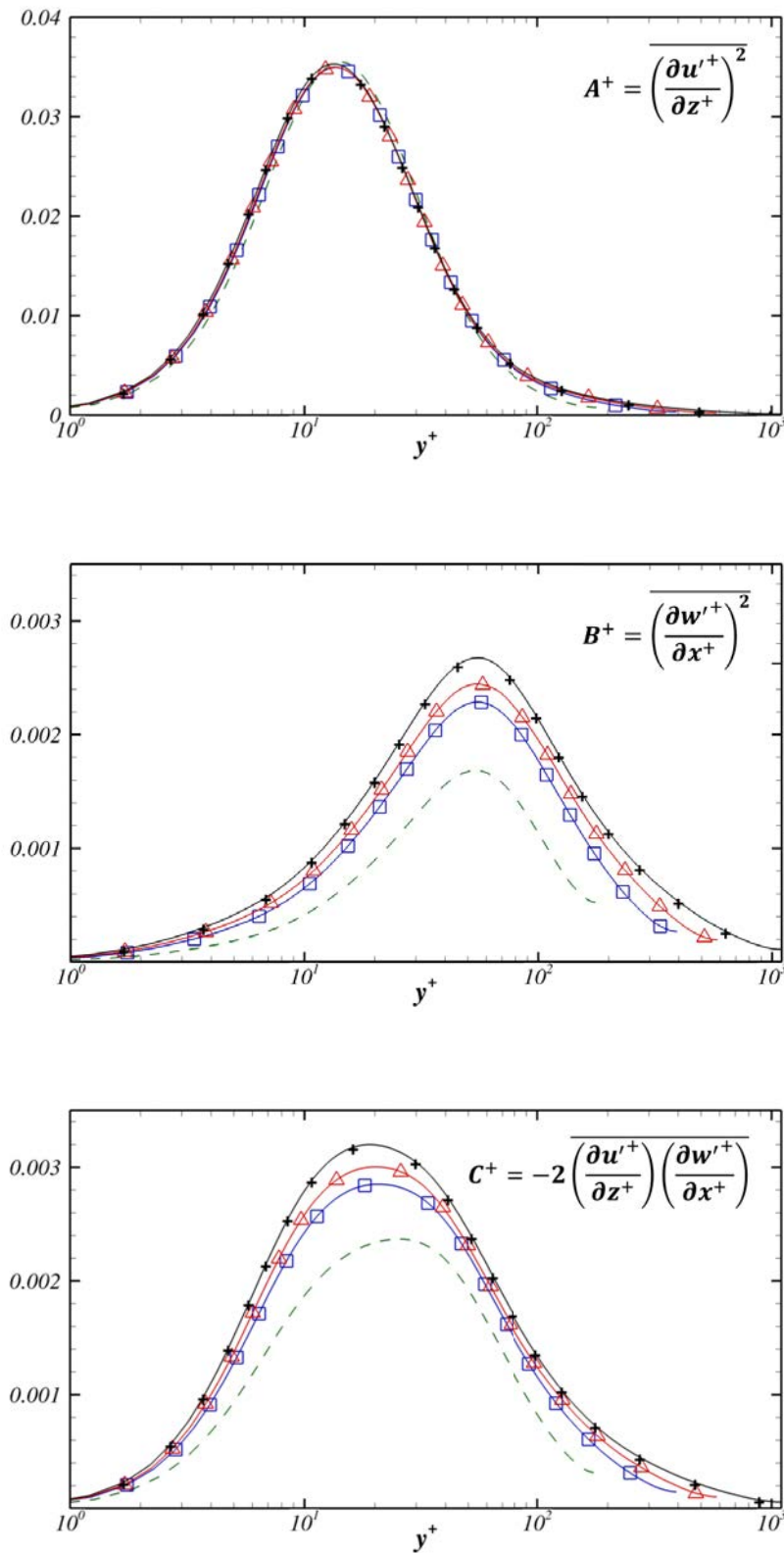


FIGURE 8.4 – Profils des contributions  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'équation 8.11 de  $\overline{\omega_y'^2}$  pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$



Avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{ii}^{(\omega)} &= \overline{\Omega_k \omega'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\omega'_i \omega'_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + \overline{\omega'_i \omega'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \\ T_{ii}^{(\omega)} &= -\overline{\omega'_i u'_k \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}} - \frac{1}{2} \overline{u'_k \frac{\partial \omega'_i \omega'_i}{\partial x_k}} \\ D_{ii}^{(\omega)} &= \frac{1}{2} \nu \overline{\frac{\partial^2 \omega'_i \omega'_i}{\partial x_k \partial x_k}} \\ \epsilon_{ii}^{(\omega)} &= \nu \overline{\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_k}}\end{aligned}$$

Dans le cas d'un écoulement en canal homogène dans les directions  $x$  et  $z$ , les différents termes de l'équation 8.13 peuvent s'écrire, pour chacune des composantes de la vorticité :

$$\begin{aligned}\text{Production} \quad \mathcal{P}_{xx}^{(\omega)} &= -\overline{\omega'_x \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y}} + \overline{\omega'_x \omega'_x \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\omega'_x \omega'_y \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{\omega'_x \omega'_z \frac{\partial u'}{\partial z}} \\ \mathcal{P}_{yy}^{(\omega)} &= -\overline{\omega'_y \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y}} + \overline{\omega'_y \omega'_x \frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{\omega'_y \omega'_y \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\omega'_y \omega'_z \frac{\partial v'}{\partial z}} \\ \mathcal{P}_{zz}^{(\omega)} &= -\overline{\omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y}} + \overline{\omega'_z \omega'_x \frac{\partial w'}{\partial x}} + \overline{\omega'_z \omega'_y \frac{\partial w'}{\partial y}} + \overline{\omega'_z \omega'_z \frac{\partial w'}{\partial z}}\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}\text{Transport} \quad T_{xx}^{(\omega)} &= -\left( \frac{1}{2} \overline{u' \frac{\partial \omega'^2_x}{\partial x}} + \frac{1}{2} \overline{v' \frac{\partial \omega'^2_x}{\partial y}} + \frac{1}{2} \overline{w' \frac{\partial \omega'^2_x}{\partial z}} \right) \\ T_{yy}^{(\omega)} &= -\left( \frac{1}{2} \overline{u' \frac{\partial \omega'^2_y}{\partial x}} + \frac{1}{2} \overline{v' \frac{\partial \omega'^2_y}{\partial y}} + \frac{1}{2} \overline{w' \frac{\partial \omega'^2_y}{\partial z}} \right) \\ T_{zz}^{(\omega)} &= -\left( \frac{1}{2} \overline{u' \frac{\partial \omega'^2_z}{\partial x}} + \frac{1}{2} \overline{v' \frac{\partial \omega'^2_z}{\partial y}} + \frac{1}{2} \overline{w' \frac{\partial \omega'^2_z}{\partial z}} - \overline{v' \omega'_z \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}} \right)\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}\text{Dissipation} \quad \epsilon_{xx}^{(\omega)} &= \nu \left\{ \overline{\left( \frac{\partial \omega'_x}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial \omega'_x}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial \omega'_x}{\partial z} \right)^2} \right\} \\ \epsilon_{yy}^{(\omega)} &= \nu \left\{ \overline{\left( \frac{\partial \omega'_y}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial \omega'_y}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial \omega'_y}{\partial z} \right)^2} \right\} \\ \epsilon_{zz}^{(\omega)} &= \nu \left\{ \overline{\left( \frac{\partial \omega'_z}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial \omega'_z}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left( \frac{\partial \omega'_z}{\partial z} \right)^2} \right\}\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}\text{Diffusion} \quad D_{xx}^{(\omega)} &= \frac{1}{2} \nu \left\{ \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_x}{\partial x^2}} + \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_x}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_x}{\partial z^2}} \right\} \\ D_{yy}^{(\omega)} &= \frac{1}{2} \nu \left\{ \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_y}{\partial x^2}} + \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_y}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_y}{\partial z^2}} \right\} \\ D_{zz}^{(\omega)} &= \frac{1}{2} \nu \left\{ \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_z}{\partial x^2}} + \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_z}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2 \omega'^2_z}{\partial z^2}} \right\}\end{aligned}.$$

La figure 8.5 montre les profils des différents termes de léquation 8.13 pour  $\overline{\omega'_x \omega'_x}/2$ ,  $\overline{\omega'_y \omega'_y}/2$  et  $\overline{\omega'_z \omega'_z}/2$      $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$ .    proximité de la paroi, le terme de diffusion  $D_{zz}^{(\omega)}$  associée à la vorticité transverse varie fortement sur une

distance très courte de l'ordre de l'échelle de longueur visqueuse et ne peut être correctement résolu par les schémas de calcul (ordre 2) utilisés pour le premier point. La balance des termes de transport de  $\overline{\omega'_z \omega'_z}/2$  au premier point est alors non nulle (de l'ordre de  $2 \times 10^{-3}$ ). Dans la figure 8.5, la valeur du terme  $D_{zz}^{(\omega)}$  au premier point (en  $y^+ = 0.25$ ) est corrigée de façon à satisfaire la condition d'équilibre. Cet ajustement ne concerne que la composante transverse de vorticité au premier point et n'a pas été appliqué pour les autres points ou pour les autres composantes de vorticité qui satisfont la condition d'équilibre. La balance au premier point est inférieure à  $10^{-4}$  pour  $\overline{\omega'_z \omega'_z}/2$  et à  $10^{-5}$  pour  $\overline{\omega'_y \omega'_y}/2$ . Au-delà, la condition d'équilibre est pleinement satisfaite pour  $\overline{\omega'_x \omega'_x}/2$  et  $\overline{\omega'_z \omega'_z}/2$  dont la balance maximale est de  $5 \times 10^{-5}$ . La déviation maximale à l'équilibre est observée pour  $\overline{\omega'_y \omega'_y}/2$  dont la balance atteint  $10^{-4}$  en  $y^+ = 20$ .

Les expressions des termes de transport et de production s'annulent en  $y^+ = 0$  et les termes de diffusion et de dissipation s'équilibrent   proximité de la paroi pour l'ensemble des composantes de l'enstrophie. Il est intéressant de remarquer que le maximum de production de  $\overline{\omega'_x \omega'_x}/2$  est atteint vers  $y^+ = 10$ , c'est à dire dans le voisinage des TQL. L'annulation du terme de diffusion au-delà de  $y^+ = 10$  suggère que les fluctuations de vorticité longitudinale conservent leur taille et ne se diffusent pas à travers l'écoulement, ce qui est compatible avec le caractère cohérent des TQL. Une autre caractéristique intéressante de la vorticité longitudinale dans cette zone est l'équilibre quasiment parfait entre la production et la dissipation. La vorticité produite dans cette zone n'est pas diffusée ou transportée et la zone  $y^+ > 10$  de la couche interne est d'une certaine manière isolée du reste de l'écoulement.

La vorticité normale, et la vorticité transverse dans une moindre mesure, ne présentent pas de couche d'équilibre et l'on observe un décalage entre le pic de production et le pic de dissipation. Dans le cas de la vorticité normale, la valeur du terme de transport, nulle à la paroi puis négative jusqu'en  $y^+ \approx 15$ , suggère que les fluctuations de vorticité normale produites dans cette zone sont transportées vers les  $y^+$  croissants. Il est important de souligner qu'en raison de la nature purement locale des équations de transport, il est impossible de déterminer si les fluctuations sont déplacées sur de petites distances (déplacement local) et restent dans le voisinage immédiat de leur zone de production ou s'il s'agit d'un déplacement de plus grande ampleur où les fluctuations sont transportées sur de longues distances avant d'être dissipées. On se contentera seulement de remarquer que ce dernier cas est conforme

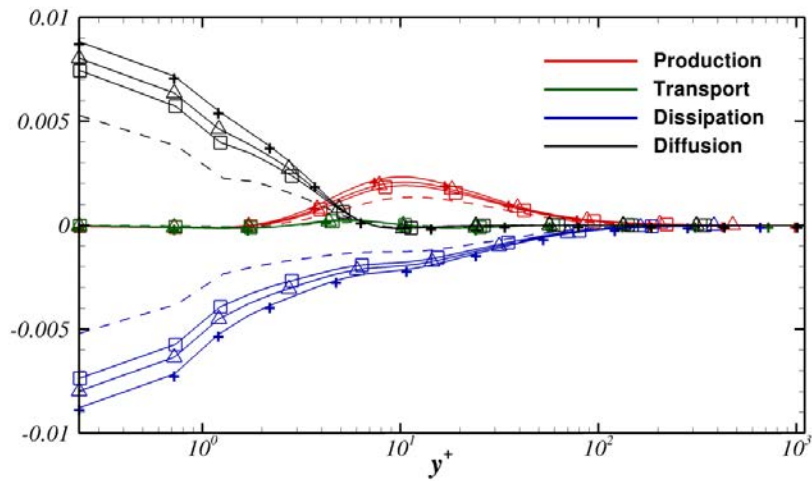
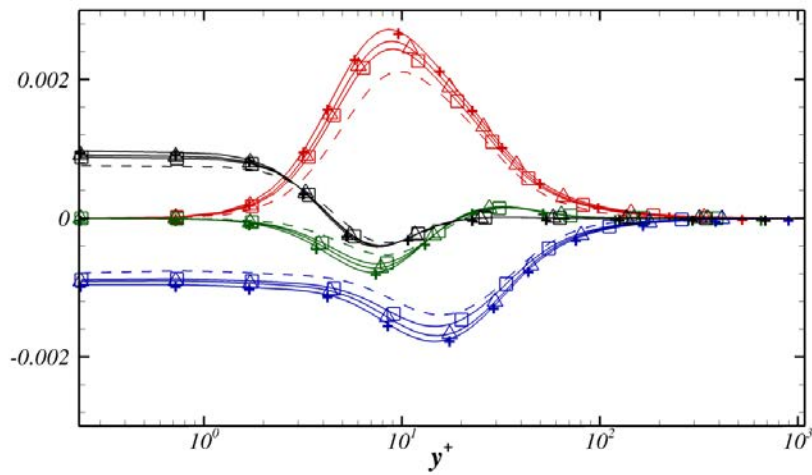
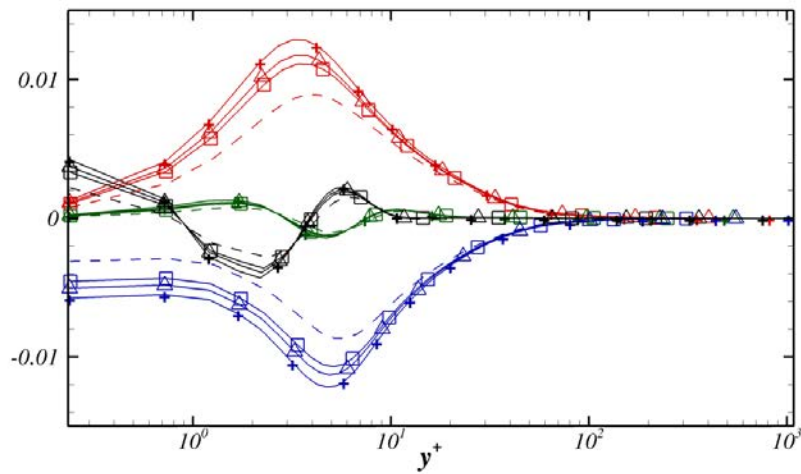

 (a) Transport de  $\overline{\omega'_x \omega'_x}/2$ 

 (b) Transport de  $\overline{\omega'_y \omega'_y}/2$ 

 (c) Transport de  $\overline{\omega'_z \omega'_z}/2$ 

 FIGURE 8.5 – Transport de l'intensité turbulente des différentes composantes de la vorticité à  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$

avec le processus de production de la vorticité longitudinale décrit en introduction de ce chapitre. Le soulèvement à l'origine de ce processus induit logiquement une vitesse verticale aux fluctuations de vorticité tout au long de leur conversion en vorticité longitudinale. La position croissante des maximums de  $\mathcal{P}_{33}^{(\omega)}$ ,  $\mathcal{P}_{22}^{(\omega)}$  et  $\mathcal{P}_{11}^{(\omega)}$  correspond par ailleurs à l'ordre de production des différentes composantes de vorticité, la vorticité transverse étant produite en premier puis transformée en vorticité normale par soulèvement tandis que la vorticité longitudinale est produite en dernier, par inclinaison de la vorticité normale.

Enfin, on notera que la proximité du pic de production de vorticité transverse à la paroi constitue un avantage certain pour l'élaboration de stratégies de réduction de la traînée due au frottement pariétal. Au-delà de la sous-couche visqueuse, la contrainte de Reynolds représente une portion significative de la contrainte totale et contribue au frottement pariétal. Or, la contrainte de Reynolds est en grande partie générée par les structures longitudinales à proximité de la paroi et pourrait éventuellement être réduite en limitant la production de vorticité transverse, à l'origine du processus de formation de vorticité longitudinale. La proximité à la paroi du maximum de production de  $\overline{\omega'_z \omega'_z}$  ( $y^+ = 3$ ) peut alors laisser espérer un bon contrôle de  $\omega_z$  au moyen d'actions adaptées sur la paroi.

## 5 Analyse spectrale

La figure 8.6 présente les densités spectrales prémultipliées  $k_x^+ k_z^+ E_{\omega'_x \omega'_x}^+$ ,  $k_x^+ k_z^+ E_{\omega'_y \omega'_y}^+$  et  $k_x^+ k_z^+ E_{\omega'_z \omega'_z}^+$  des différentes composantes des fluctuations de vorticité à la position de leurs maximums respectifs à la paroi, c'est à dire en  $y^+ = 0$  pour  $E_{\omega'_x \omega'_x}^+$  et  $E_{\omega'_z \omega'_z}^+$  et en  $y^+ = 12$  pour  $E_{\omega'_y \omega'_y}^+$ , pour  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . La présence d'une excroissance dans les spectres de  $\omega'_x$  et plus particulièrement de  $\omega'_z$  traduit l'influence des grandes échelles et est conforme avec la dépendance de  $\overline{\omega'^+ \omega'^+}$  et  $\overline{\omega'^+ \omega'^+}$  avec le nombre de Reynolds discutée précédemment. On remarque par ailleurs que les spectres de  $\omega'_y$     $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$  co cident particulièrement bien et ne comportent que des modes de longueurs d'onde inférieures ou intermédiaires, ce qui est cohérent avec l'invariance des profils de  $\overline{\omega'^+ \omega'^+}$  avec le nombre de Reynolds.

L'invariance de  $\overline{\omega'^+ \omega'^+}$  avec le nombre de Reynolds peut être expliquée analytiquement en exprimant le spectre de  $\omega'_y$  ( $E_{\omega'_y \omega'_y}$ ) en fonction du spectre de  $u'$  ( $E_{u' u'}$ ).

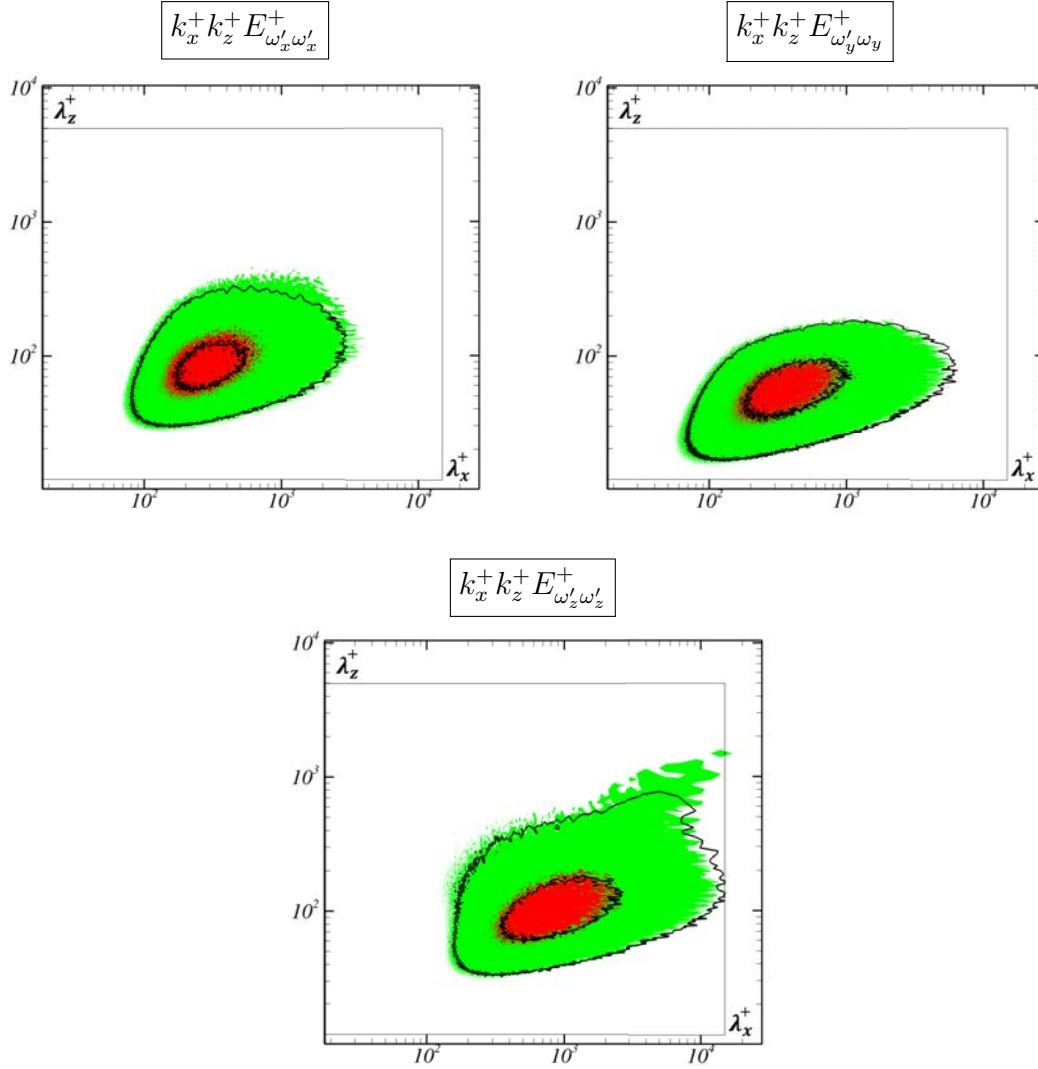


FIGURE 8.6 – Densités spectrales pré-multipliées des fluctuations de vorticité à la paroi (pour  $E_{\omega'_x \omega'_x}^+$  et  $E_{\omega'_z \omega'_z}^+$ ) et en  $y^+ = 12$  pour  $E_{\omega'_y \omega'_y}^+$ . Les contours et les couleurs délimitent respectivement les spectres de  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . Les zones centrale et périphérique correspondent respectivement aux modes dont l'intensité est supérieure à 0.625 et 0.125 fois le maximum de l'intensité spectrale à  $Re_\tau = 1100$

On considère tout d'abord la dérivée selon  $z$  de la vorticité normale fluctuante :

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} \quad (8.14)$$

La condition d'incompressibilité de l'écoulement permet par ailleurs d'écrire :

$$\frac{\partial \omega'_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} \quad (8.15)$$

La transformée de Fourier de  $u'$  peut donc être exprimée à partir des transformées de  $\omega'_y$  et  $\frac{\partial v'}{\partial y}$  :

$$\widehat{u'} = \frac{\iota k_z}{k_x^2 + k_z^2} \widehat{\omega'_y} - \frac{\iota k_x}{k_x^2 + k_z^2} \widehat{\frac{\partial v'}{\partial y}} \quad (8.16)$$

et la densité spectrale  $E_{u'u'} = \widehat{u'} \widehat{u'}^*$  peut finalement être exprimée à partir de  $E_{\omega'_y \omega'_y}$  par :

$$\begin{aligned} E_{u'u'} = & \underbrace{\frac{k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\omega'_y \omega'_y}}_{A(k_x, k_z)} + \underbrace{\frac{k_x^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial y}}}_{B(k_x, k_z)} \\ & - \underbrace{\frac{2k_x k_z}{(k_x^2 + k_z^2)^2} \left( \Im\{\widehat{\omega'_y}\} \Im\{\widehat{\frac{\partial v'}{\partial y}}\} + \Re\{\widehat{\omega'_y}\} \Re\{\widehat{\frac{\partial v'}{\partial y}}\} \right)}_{C(k_x, k_z)} \end{aligned} \quad (8.17)$$

La figure 8.7 montre la densité spectrale  $E_{u'u'}^+$  ainsi que les termes  $A^+$ ,  $B^+$  et  $C^+$  prémultipliés par  $k_x^+ k_z^+$ . On remarque que les contours de  $E_{u'u'}^+$  et de  $A^+$  sont remarquablement similaires tandis que les contours des composantes  $B^+$  et  $C^+$  occupent des domaines spectraux différents.

Par ailleurs, l'application du théorème de Parseval permet d'évaluer la contribution  $C_T$  des différents termes  $T$  de l'équation 8.17 à  $\overline{u'u'}$  :

$$C_T = \frac{S_T}{\sum_{k_x} \sum_{k_z} E_{u'u'}(k_x, k_z)} \quad (8.18)$$

où  $S_T = \sum_{k_x} \sum_{k_z} T(k_x, k_z)$ . Les termes A ( $S_A = 7.124$ ) et B ( $S_B = 0.314$ ) représentent respectivement 96% et 4% de l'intensité turbulente totale tandis que la contribution du terme  $C$  est négligeable ( $C = -0.018$ ). La densité spectrale de  $\omega'_y$  peut donc être approximée par :

$$E_{\omega'_y \omega'_y} \approx \frac{(k_x^2 + k_z^2)^2}{k_z^2} E_{u'u'} = \mathcal{F}(k_x, k_z) E_{u'u'} \quad (8.19)$$

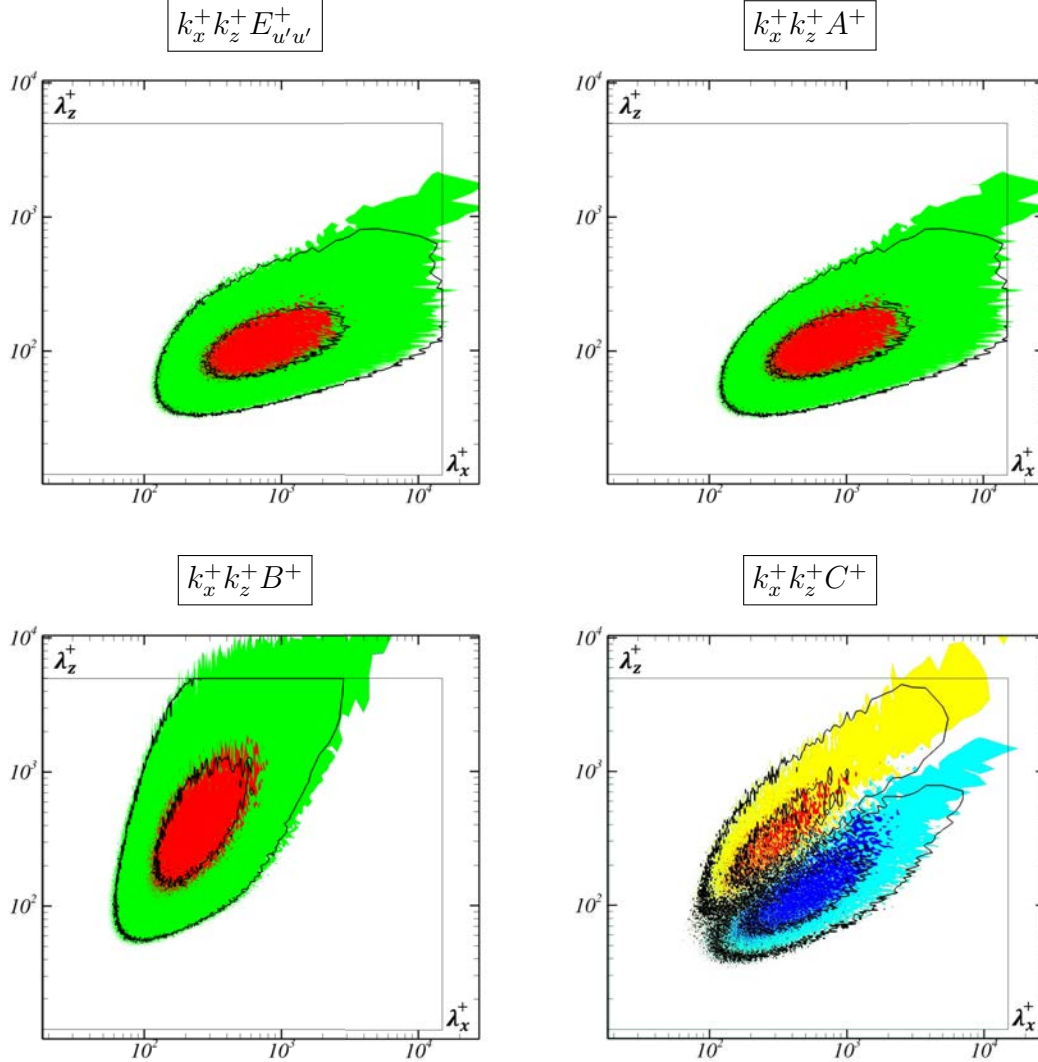


FIGURE 8.7 – Représentation des différents termes de l'équation 8.17 prémultipliés par  $k_x^+ k_z^+$  dans le plan  $(x, z)$  à  $y^+ = 12$ . Les contours et les couleurs délimitent respectivement les spectres de  $Re_\tau = 395$  et  $Re_\tau = 1100$ . Les zones centrale et périphérique correspondent respectivement aux modes dont l'intensité est supérieure à 0.625 et 0.125 fois le maximum de l'intensité spectrale à  $Re_\tau = 1100$ . La densité spectrale prémultipliée  $k_x^+ k_z^+ C^+$  comporte une partie supérieure positive (en jaune et rouge) et une partie inférieure négative (en bleu clair et bleu foncé)

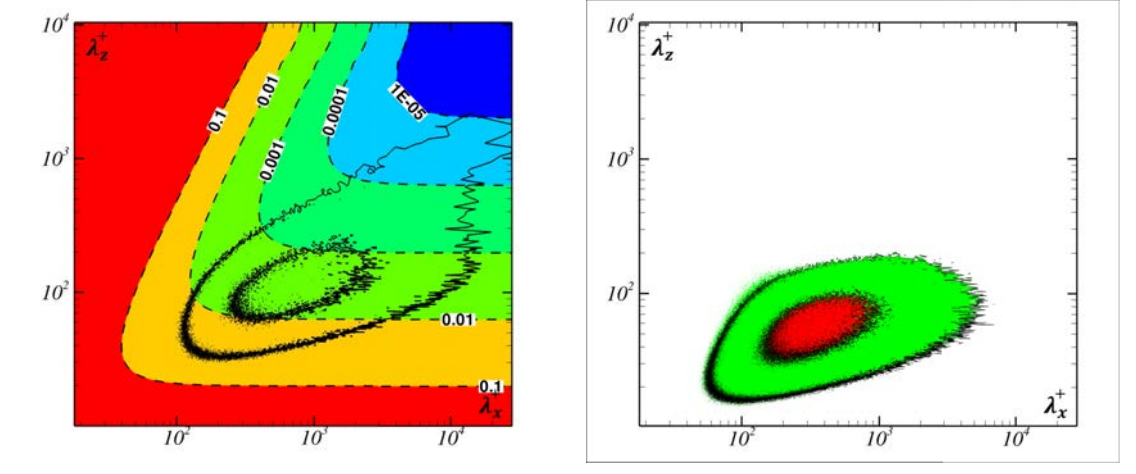


FIGURE 8.8 – À gauche : Densité spectrale prémultipliée de  $u'$  superposée avec la fonction  $\mathcal{F}$  de l'équation 8.19. À droite : Densité spectrale prémultipliée de  $\omega'_y$  (contours) superposée avec la densité spectrale estimée selon la relation 8.19 (couleurs). Les deux figures ont été obtenues pour  $Re_\tau = 1100$  en  $y^+ = 12$

Ce lien entre  $E_{\omega'_y \omega'_y}$  et  $E_{u' u'}$  est représenté dans la figure 8.8 qui montre la densité spectrale prémultipliée de  $u'$  (en  $y^+ = 12$  et  $Re_\tau = 1100$ ) superposée avec la fonction  $\mathcal{F}$  (à gauche) ainsi que la densité spectrale de  $\omega'_y$  estimée selon la relation 8.19 (à droite). Cette dernière coïncide remarquablement bien avec la densité spectrale « exacte » de  $\omega'_y$  en  $y^+ = 12$  à  $Re_\tau = 1100$  (contours). La fonction  $\mathcal{F}$  est clairement négligeable pour les longueurs d'onde élevées et agit comme un filtre qui élimine les plus grandes longueurs d'onde. La contribution des échelles externes est négligeable et la vorticité selon  $y$  exprimée dans les échelles internes est donc indépendante du nombre de Reynolds.

## 6 Conclusions

Ce chapitre a été consacré à l'étude de l'intensité turbulente et de son transport. L'étude de l'intensité turbulente a révélé que la composante normale  $\overline{\omega'_y \omega'_y}$  est indépendante du nombre de Reynolds tandis qu'à l'inverse la composante longitudinale  $\overline{\omega'_x \omega'_x}$  et transverse  $\overline{\omega'_z \omega'_z}$  présentent de fortes variations, notamment à proximité des parois. Cette dépendance de  $\overline{\omega'_x \omega'_x}$  et  $\overline{\omega'_z \omega'_z}$  à la paroi n'est a priori pas surprenante et peut être expliquée à travers l'effet de modulation des fluctuations de vitesse de la couche interne par les grandes structures décrit par Marusic et al. [94]. L'utilisation de la relation 8.8 suggère que l'intensité  $\overline{\omega'_z \omega'_z}$  turbulente varie en  $\ln(Re_\tau)$  ce qui est compatible avec le comportement de la dissipation  $\tilde{\epsilon}_{11}$



aux parois (voir figure 7.15), directement reliée à  $\overline{\omega'_z \omega'_z}$ . L'invariance de l'intensité turbulente normale dans les échelles internes est essentiellement due à l'invariance de la quantité  $A = \overline{(\partial u' / \partial z)^2}$  qui prédomine sur les autres composantes de l'intensité normale (relation 8.11), dépendantes du nombre de Reynolds. On notera toutefois que les composantes  $B$  et  $C$  de la relation 8.11 augmentent fortement avec le nombre de Reynolds et pourraient devenir prédominantes pour des nombres de Reynolds supérieurs. L'invariance de  $\overline{\omega_y'^+ \omega_y'^+}$  n'est donc probablement une caractéristique universelle de la turbulence de paroi.

Enfin, une étude inédite des termes de l'équation de transport de la vorticité a également été réalisée. La position croissante des pics de production de  $\overline{\omega_z'^+ \omega_z'^+}$ ,  $\overline{\omega_y'^+ \omega_y'^+}$  et  $\overline{\omega_x'^+ \omega_x'^+}$  est compatible avec le mécanisme de production de la vorticité longitudinale à partir du soulèvement de la vorticité transverse puis de l'inclinaison de la vorticité normale ainsi générée. La proximité du pic de production de vorticité transverse est particulièrement intéressante et suggère que la trainée, en partie générée par les structures longitudinales, pourrait être réduite efficacement en empêchant la production de vorticité transverse à partir d'actions adaptées à la paroi.

# Chapitre 9

## Influence des événements extrêmes sur la production

### 1 Introduction

L'étude des statistiques de transport de l'intensité turbulente réalisée au chapitre 7 a permis de confirmer la pertinence de l'échelle  $u_\tau^3/y$  pour les différents termes de l'équation de transport dans la couche de recouvrement. Dans cette couche, la contrainte de Reynolds est en effet décrite par  $-\overline{u'v'} = u_\tau^2$  dans la limite des grands nombres de Reynolds, tandis que le cisaillement moyen est défini par  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{u_\tau}{y}$ . La production est alors proche de  $u_\tau^3/y$ , qui est donc une échelle naturelle pour l'expression des différents termes de transport dans la couche de recouvrement. La situation est malheureusement plus complexe dans la couche interne où les termes de l'équation de transport conservent une forte dépendance avec le nombre de Reynolds lorsqu'ils sont exprimés dans les échelles internes ( $u_\tau^4/\nu$ ), qui sont le jeu d'échelles naturel de l'écoulement dans cette région. L'inadéquation des échelles internes pour les équations de transport est particulièrement flagrante pour la dissipation et les termes liés à la pression mais l'on observe également une dépendance significative de la production avec le nombre de Reynolds.

La production de la turbulence est une quantité centrale de l'écoulement. La légère dépendance de la production avec le nombre de Reynolds n'est donc pas anodine et peut être reliée aux mécanismes à l'œuvre dans la génération de la turbulence. Par ailleurs, l'analyse spectrale de la quantité  $u'v'$  réalisée au chapitre 7 ne montre pas de différences notables entre les spectres à différents nombres de Reynolds, susceptibles de nous éclairer sur l'origine de cette dépendance. L'approche

utilisée dans ce chapitre est basée sur les statistiques de Palm de la production qui décrivent la production moyenne en fonction de l'intensité des fluctuations de vitesse longitudinale  $u'$  ou normale  $v'$ , c'est à dire lorsque les fluctuations  $u'$  ou  $v'$  franchissent un niveau  $l$  donné. Les statistiques de Palm présentent l'intérêt de « segmenter » les fluctuations de vitesse et d'identifier celles qui contribuent le plus à la production ou celles qui dépendent du nombre de Reynolds et sont donc associées aux grandes structures de l'écoulement. Un autre avantage des statistiques de Palm est leur forte sensibilité au nombre de Reynolds qui permet de mettre en évidence certains effets, difficilement observables à travers les statistiques habituellement utilisées.

Ce chapitre n'a pas pour ambition de faire un lien quelconque entre les statistiques de Palm et les mécanismes de génération de la turbulence mais plutôt d'identifier les niveaux  $l$  qui contribuent le plus à la production et ceux qui sont à l'origine de la dépendance avec le nombre de Reynolds. Les données présentées ici pourront cependant alimenter les modèles actuels de génération de la turbulence. Un autre point important développé dans ce chapitre est que l'expression de la production moyenne au niveau  $l$ ,  $\mathbb{E}([P]_{u'=l}) = -l \frac{\partial U}{\partial y} \mathbb{E}([v']_{u'=l})$ , généralement utilisée dans la littérature n'est pas rigoureusement exacte, en dépit de sa forme très intuitive.

Dans un premier temps, une présentation rapide des statistiques de Palm sera effectuée afin de fournir des éléments d'analyse des résultats présentés par la suite. La relation exacte de la production moyenne lors d'un franchissement de niveau sera également dérivée à partir de la distribution de Palm et reliée avec la moyenne biaisée utilisée dans la littérature. Les statistiques relatives à la fréquence des franchissements de niveau seront ensuite comparées au modèle gaussien, parfois utilisé dans la littérature [95, 96] pour décrire la probabilité des fluctuations de vitesse  $u'$  et  $v'$ . Enfin, les statistiques de Palm de la production seront présentées. Les statistiques de Palm biaisées et non biaisées seront tout d'abord comparées afin de justifier l'importance de l'utilisation des statistiques exactes. La moyenne de la production en fonction de l'intensité des fluctuations  $u'$  et  $v'$  dans la couche interne sera ensuite présentée et interprétée à travers l'influence des éjections et des balayages dans cette région. L'influence du nombre de Reynolds sera également étudiée et expliquée par une décomposition des fluctuations  $u'$  en composantes passive et active [75].

## 2 Présentation rapide des statistiques de Palm

On considère une variable aléatoire  $Q$  qui dépend de la variable aléatoire  $S$  et on s'intéresse aux statistiques de  $Q$  lorsque la condition  $s = l$  est satisfaite, comme illustré dans la figure 9.1. On suppose par ailleurs que les variables  $Q$  et  $S$  sont ergodiques. Dans ce travail, les variables  $Q$  et  $S$  seront les fluctuations de vitesse  $u'$  et  $v'$  dont on cherchera à établir le degré de corrélation en fonction de leurs intensités respectives. Les variables  $Q$  et  $S$  peuvent être associées à des signaux temporels ou aux valeurs prises dans l'espace des champs  $Q(\mathbf{x})$  et  $S(\mathbf{x})$ . Pour simplifier les définitions qui vont suivre, on considère dans un premier temps que  $Q$  et  $S$  sont des signaux qui varient aléatoirement dans le temps.

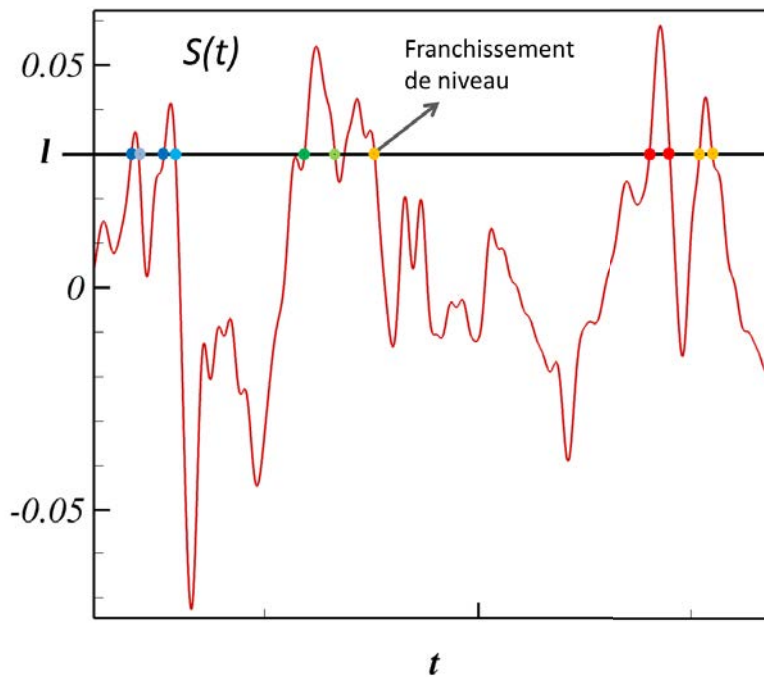


FIGURE 9.1 – Franchissements d'un niveau  $l$  par le signal  $S(t)$ , marqué par le signal  $Q(t)$ . Les franchissements de niveau sont indiqués par des points dont la couleur varie du bleu au rouge selon la valeur du signal  $Q(t)$

## 2.1 Distribution de Palm

Soit  $\mathcal{N}(l)$  le nombre total *moyen* de fois que le signal  $S(t)$  franchi le niveau  $l$  durant un intervalle de temps donné et  $\mathcal{N}(l, E)$  le nombre de fois pour lesquelles la condition  $E$  est observée sur l'ensemble des  $\mathcal{N}(l)$  franchissements du niveau  $l$ . La distribution de Palm de la condition  $E$  est la probabilité que la condition  $E$  soit satisfaite sachant que le niveau  $l$  est franchi par  $S(t)$ . La distribution de Palm est naturellement donnée par le rapport des nombres  $\mathcal{N}(l, E)$  et  $\mathcal{N}(l)$ , et donc le rapport des probabilités associées, et s'écrit :

$$\mathbb{P}_l(E) = \frac{\mathcal{N}(l, E)}{\mathcal{N}(l)} = \frac{P(F_l, E)}{P(F_l)} \quad (9.1)$$

où  $F_l$  représente la condition de franchissement du niveau  $l$  (par le signal  $S(t)$ ). La notation  $P(F_l)$  représente la probabilité de franchir le niveau  $l$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  tandis que  $P(F_l, E)$  correspond à la probabilité de franchir  $l$  tout en satisfaisant la condition  $E$ . La probabilité  $P(F_l)$  est donnée par la relation de Kac-Rice [97] :

$$P(F_l) = \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(l, \eta) d\eta \quad (9.2)$$

où  $\eta = \frac{\partial S}{\partial t}$  est la dérivée temporelle du signal  $S(t)$  et  $\Delta t$  est l'intervalle de temps considéré. La fonction  $p(l, \eta)$  définit la densité de probabilité du signal  $S(t)$  d'avoir la valeur  $l$  et la pente  $\eta$ . La probabilité  $P(F_l, E)$  dépend évidemment de la condition  $E$  considérée et peut être obtenue selon une relation de Rice légèrement modifiée en considérant par la densité de probabilité  $p(l, \eta, e_1, e_2, \dots)$  où  $(e_1, e_2, \dots)$  est l'ensemble des variables aléatoires intervenant dans la condition  $E$ . Par exemple, si on considère la distribution de Palm de la condition  $E : \ll q \leq Q(t) \leq q + dq \gg$  lorsque  $s = l$ , la probabilité  $P(F_l, E)$  s'écrit simplement :

$$P(F_l, E) = \Delta q \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(l, \eta, q) d\eta \quad (9.3)$$

et la distribution de Palm associée est alors donnée par :

$$d\mathbb{P}_l(q) = \frac{dq \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(l, \eta, q) d\eta}{\Delta t \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(l, \eta) d\eta} = \gamma^{-1} dq \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(l, \eta, q) d\eta \quad (9.4)$$

La distribution de Palm  $d\mathbb{P}_l(q)$  de la relation 9.4 correspond à la probabilité du signal  $Q(t)$  d'être compris dans l'intervalle infinitésimal  $[q, q + dq]$  lorsque le niveau

$l$  est franchi par le signal  $S(t)$ . La densité de probabilité associée  $p_l(q) = d\mathbb{P}_l(q)/dq$  sera très souvent utilisée par la suite pour le calcul des valeurs moyennes associées au franchissement d'un niveau.

## 2.2 Valeur moyenne biaisée et non biaisée

La valeur moyenne  $\bar{q}_l$  du signal  $Q(t)$  lorsque  $S(t) = l$  peut être exprimée à partir de la densité de probabilité de  $p_l(q)$  selon la relation :

$$\bar{q}_l = \int_{-\infty}^{+\infty} q p_l(q) dq = \gamma^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q |\eta| p(q, l, \eta) dq d\eta \quad (9.5)$$

Cette expression peut être formulée de manière plus « intuitive » comme le rapport des espérances de  $q |\eta|$  et  $|\eta|$ , en réécrivant les fonctions de densité de probabilité comme  $p(q, l, \eta) = p(l)p(q, \eta|l)$  et  $p(l, \eta) = p(l)p(\eta|l)$ . La moyenne du signal  $Q(t)$  pour au niveau  $S(t) = l$ , s'écrit alors :

$$\bar{q}_l = \frac{\mathbb{E}([q |\eta|]_{s=l})}{\mathbb{E}([|\eta|]_{s=l})} \quad (9.6)$$

Dans la pratique, les espérances  $\mathbb{E}([q |\eta|]_{s=l})$  et  $\mathbb{E}([|\eta|]_{s=l})$  sont estimées par les moyennes de  $q |\eta|$  et de  $|\eta|$  sur l'ensemble des franchissements du niveau  $l$ . La qualité de la moyenne  $\bar{q}_l$  ainsi obtenue dépend alors du nombre de franchissements enregistrés pour le niveau considéré. On notera que dans le cas particulier où les variables  $q$  et  $\eta$  sont indépendantes :

$$\mathbb{E}([q |\eta|]_{s=l}) = \mathbb{E}([q]_{s=l})\mathbb{E}([|\eta|]_{s=l}) \quad (9.7)$$

et la valeur moyenne de  $q$  pour  $s = l$  est alors simplement donnée par :

$$\bar{q}_l = \mathbb{E}([q]_{s=l}) \quad (9.8)$$

Dans le cas général, l'hypothèse d'indépendance statistique  $q$  et  $\eta$  n'est pas valable et l'expression 9.8 de la moyenne n'est pas exacte malgré son utilisation dans la littérature [98] consacrée à l'étude des franchissements de niveau. Par la suite, la quantité moyenne évaluée selon l'expression 9.8 incorrecte sera qualifiée de biaisée et notée par  $\bar{q}_{lb}$ . La quantité moyenne  $\bar{q}_{lb}$  peut être reliée à la moyenne exacte donnée par la relation à partir de la covariance de  $q$  et  $|\eta|$ . La covariance de  $q$  et  $|\eta|$  est définie par :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(q, |\eta|) &= \mathbb{E}(q - \mathbb{E}(q)) \mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}(\eta)) \\ &= \mathbb{E}([q|\eta]_{s=l}) - \mathbb{E}([q]_{s=l})\mathbb{E}([\eta]_{s=l})\end{aligned}\quad (9.9)$$

La moyenne exacte peut alors être exprimée par :

$$\bar{q}_l = \frac{\text{Cov}(q, |\eta|)}{\mathbb{E}([\eta]_{s=l})} + \bar{q}_{lb} \quad (9.10)$$

Le lecteur est invité à consulter l'article de l'annexe B pour plus de détails concernant les développements mathématiques relatifs aux statistiques de Palm.

### 3 Fréquence des passages par le niveau $l$

La fréquence de passage d'un signal  $S(t)$  par le niveau  $l$  est donnée par le rapport du nombre de passages enregistrés et la période d'acquisition  $T$  :

$$f_S(l) = \frac{\mathcal{N}(l)}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(l, \eta) d\eta = p(l) \int_{-\infty}^{\infty} |\eta| p(\eta|l) d\eta \quad (9.11)$$

La fréquence de passage des fluctuations de vitesse a déjà été étudiée expérimentalement par Tardu [96] et Sreenivasan et al. [95] à partir des signaux temporels de la vitesse longitudinale ( $S(t) = u'(t)$ ) enregistrés par une sonde à fil chaud. Ces mesures ont montré que la fréquence de passage peut être relativement bien décrite en faisant l'hypothèse que les fluctuations de vitesse sont régies par une loi normale. Dans ce cas, les densités de probabilité  $p(l)$  et  $p(\eta|l)$  sont régies par la loi normale et s'écrivent [99] :

$$\begin{aligned}p(u' = l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{l^2}{\sigma_u^2}\right) \\ p(\eta|l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}\right)\end{aligned}\quad (9.12)$$

où  $\sigma_u$  est l'écart type du signal  $u'(t)$ . La fréquence des passages par le niveau  $l$  est alors donnée par :

$$f_u(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{l^2}{\sigma_u^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\eta|}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}\right) d\eta \quad (9.13)$$

Le résultat de l'intégrale de la relation 9.13 est  $\frac{\sqrt{2}\sigma_\eta}{\sqrt{\pi}}$  et la fréquence de passage

s'exprime finalement par :

$$f_u(l) = f_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{l^2}{\sigma_u^2}\right) \quad (9.14)$$

où  $f_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_u}$  est la fréquence des passages par zéro. On notera que le rapport  $\sigma_\eta/\sigma_u$  correspond à l'inverse de l'échelle de Taylor  $\lambda = \sigma_u/\sigma_\eta$ . L'échelle de Liepmann associée à  $f_0$  définie par  $\Lambda = 1/\pi f_0$  est donc égale à l'échelle de Taylor. L'équivalence entre les échelles de Taylor et Liepmann obtenue pour le modèle Gaussien a été vérifiée de manière satisfaisante par Sreenivasan et al. [95]. Les fréquences de passage par le niveau  $l$  mesurées par Tardu suivent par ailleurs approximativement la loi normale 9.14 [96].

On s'intéresse ici à la fréquence spatiale des passages par le niveau  $l$  des fluctuations de vitesse longitudinale dans les directions  $x$  et  $z$  de l'écoulement. Dans le cas du modèle gaussien, la fréquence des passages par le niveau  $l_{u_i}$  des fluctuations de vitesse  $u'_i$  détectées dans la direction  $x_i$  est donnée par la relation 9.14 adaptée au cas spatial :

$$f_{u_i}^{(x_i)}(l) = \frac{1}{\pi \lambda_{u_i}^{(x_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} l_{u_i}^{*2}\right) \quad (9.15)$$

où  $l_{u_i}^* = l_{u_i}/\sigma_{u_i} = l/\sqrt{u_i'^2}$ . L'échelle de Taylor  $\lambda_{u_i}^{(x_i)}$  pour la composante  $u_i$  de la vitesse dans la direction  $x_i$  est donnée par  $\lambda_{u_i}^{(x)} = \sqrt{\sigma_{u_i}^{+2} / (\partial u_i^+ / \partial x^+)^2}$  dans la direction longitudinale et  $\lambda_{u_i}^{(z)} = \sqrt{\sigma_{u_i}^{+2} / (\partial u_i^+ / \partial z^+)^2}$  dans la direction transverse. La figure 9.2 montre les fréquences de passage par le niveau  $l_u$  des fluctuations de vitesse longitudinale à  $y^+ = 12$  et  $Re_\tau = 1100$  dans les directions transverse et longitudinale. Les fréquences obtenues sont relativement proches des fréquences déduites du modèle gaussien (courbes discontinues) à l'exception des passages par des niveaux  $l_u$  négatifs (éjections) clairement sous-représentés par rapport au cas gaussien. L'intensité des pics de fréquence est en revanche en bon accord avec celle prédites par le modèle gaussien. La fréquence des passages est donc, en première approximation, inversement proportionnelle à l'échelle de Taylor  $f_u^{(x_i)} \propto \frac{1}{\lambda_u^{(x_i)}}$ . Enfin, on notera que l'activité des passages par niveau est beaucoup plus intense dans la direction transverse et montre que la structure transversale joue un rôle primordial dans la production d'énergie turbulente.



Les figures 9.3 et 9.4 présentent les échelles de Taylor des fluctuations de vitesse longitudinale et normale dans les directions  $x$  et  $z$ . Les échelles de Taylor sont plus étendues dans la direction  $x$  que dans la direction  $z$  ce qui est cohérent avec les fréquences de passage plus élevées dans la direction transverse. On remarque par ailleurs que les échelles de Taylor associées à la vitesse normale sont près de deux fois plus petites que pour la vitesse longitudinale. Ceci se traduit par une activité de passage par niveaux plus importante pour la vitesse normale que pour la vitesse longitudinale ( $f_v^{(x_i)} > f_u^{(x_i)}$ ). La supériorité des échelles de Taylor associées à la vitesse  $u$  n'est pas surprenante et traduit le fait que les fluctuations de vitesse longitudinale forment des stries étendues entourées par des fluctuations de vitesse normale plus localisées et d'échelle inférieure comme le montre la figure 7.21. On notera par ailleurs l'invariance remarquable des échelles de Taylor de la vitesse normale dans la direction  $x$  et plus particulièrement dans la direction  $z$  où les courbes des différents nombres de Reynolds coïncident parfaitement. Les fluctuations de vitesse normale sont en effet générées par les structures tourbillonnaires de l'écoulement dont les échelles caractéristiques sont indépendantes des échelles externes. L'invariance de l'échelle de Taylor  $\lambda_u^{(z)}$  pour  $y^+ < 20$  est par ailleurs conforme à l'invariance des fluctuations de  $u$  de sa dérivée transverse  $\frac{\partial u}{\partial z}$  discutée précédemment et liées au caractère universel des stries longitudinales.

Enfin, il est important de souligner que les fréquences des passages diminuent très rapidement vers les événements les plus extrêmes situés au-delà de la gamme  $[-3, 3]$ . Par la suite, la plage de niveaux considérés sera ajustée de façon à disposer d'au moins 10 000 passages et assurer ainsi la convergence des statistiques. Bien que le nombre de passage par un niveau  $l$  donné soit généralement plus élevé pour la vitesse  $v$  que pour la vitesse  $u$ , les statistiques de Palm basées sur la vitesse  $u$  et celles basées sur la vitesse  $v$  seront malgré tout présentées sur les mêmes intervalles par soucis de consistance et afin de faciliter la comparaison des figures.

## 4 Statistiques de Palm de la production

La production moyenne lors d'un franchissement par la composante de vitesse  $u_i$  du niveau  $l_{u_i}$  est donnée par :

$$\mathcal{P}_{l_{u_i}} = -\frac{\partial U}{\partial y} l_{u_i}^* \sigma_{u_i} (\overline{u_j})_{l_{u_i}} \quad (9.16)$$

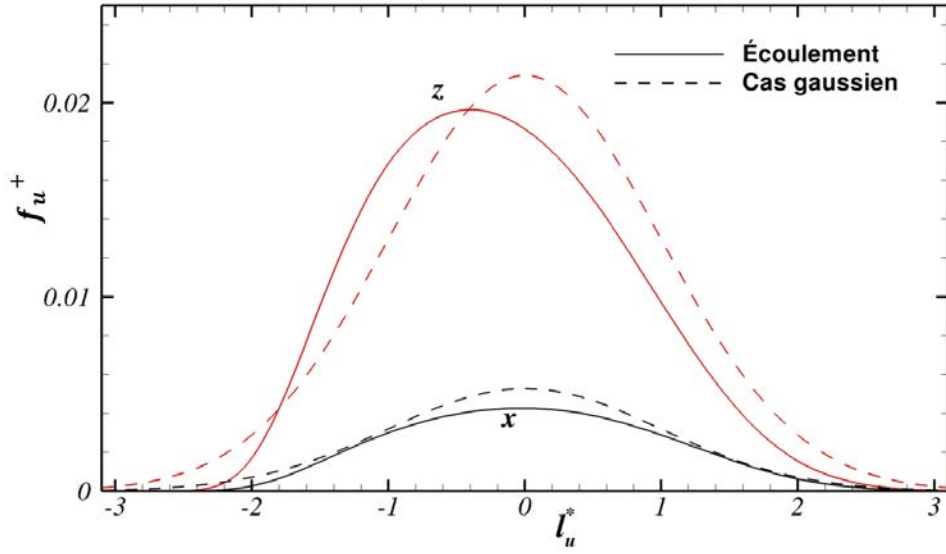


FIGURE 9.2 – Fréquence de passage des fluctuations de vitesse longitudinale par le niveau  $l_u$  à  $y^+ = 12$  et  $Re_\tau = 1100$  déterminée dans la direction transverse (courbe la plus importante en rouge) et dans le direction longitudinale (courbe la plus faible en noir). Les courbes discontinues représentent les fréquences déduites du modèle gaussien (relation 9.15)

où  $j = 2$  pour  $i = 1$  et inversement. La valeur moyenne  $(\overline{u_j})_{l_{u_i}}$  est donnée à partir de la relation 9.6 et s'écrit :

$$(\overline{u_j})_{l_{u_i}} = \frac{\mathbb{E} \left( \left[ u_j \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right| \right]_{u_i=l_{u_i}^* \sigma_{u_i}} \right)}{\mathbb{E} \left( \left[ \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right| \right]_{u_i=l_{u_i}^* \sigma_{u_i}} \right)} \quad (9.17)$$

#### 4.1 Hypothèse de normalité conjointe

L'hypothèse de normalité conjointe a été utilisée par Sreenivasan et al. [100] pour l'étude des moments des contraintes de Reynolds dans le cas d'une couche limite atmosphérique. Cette hypothèse consiste à considérer que les fluctuations de vitesse  $u'_i$  et  $u'_j$  intervenant dans la relation 9.16 sont conjointement normales, c'est à

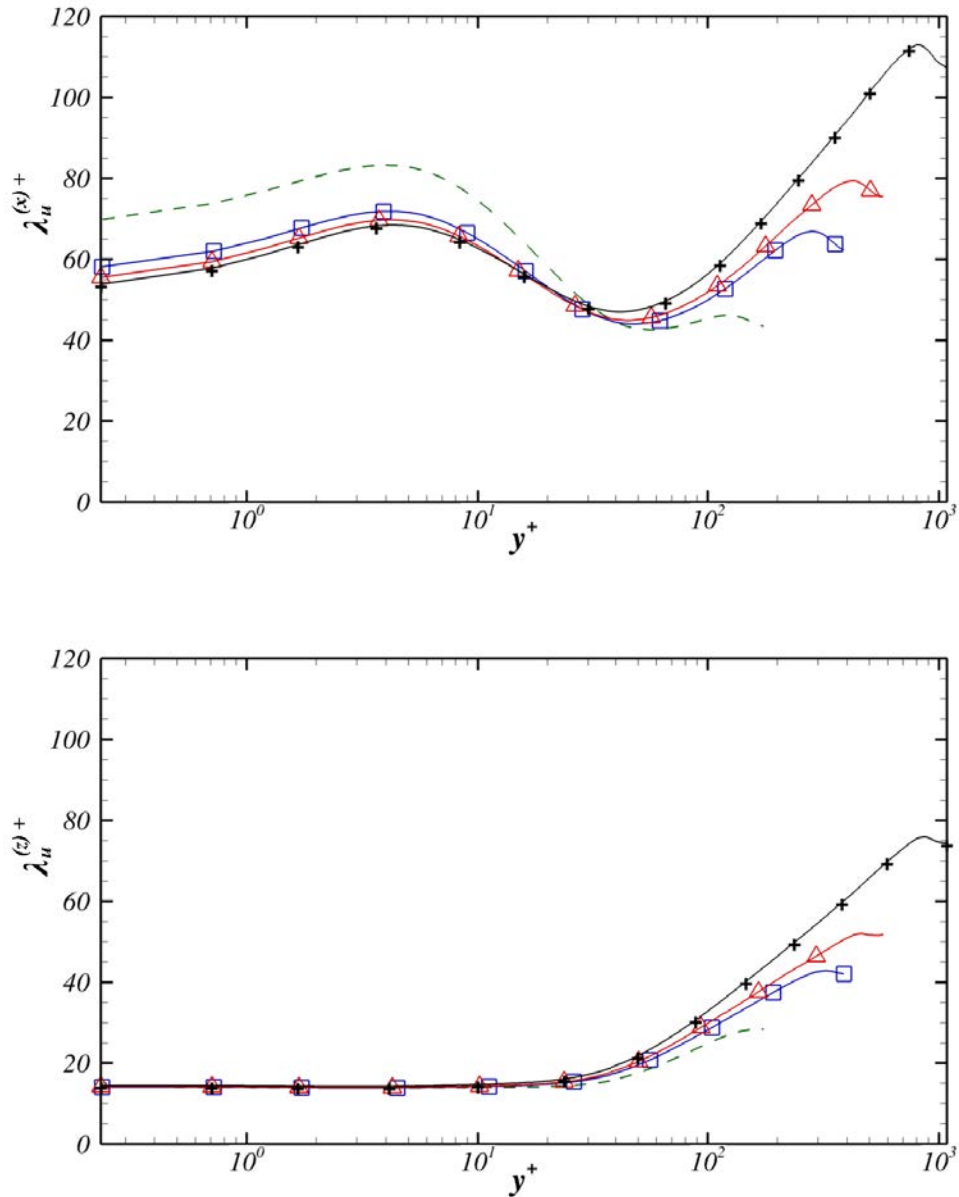


FIGURE 9.3 – Échelles de Taylor associées aux fluctuations de vitesse longitudinale dans les directions longitudinale et transverse pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$ .

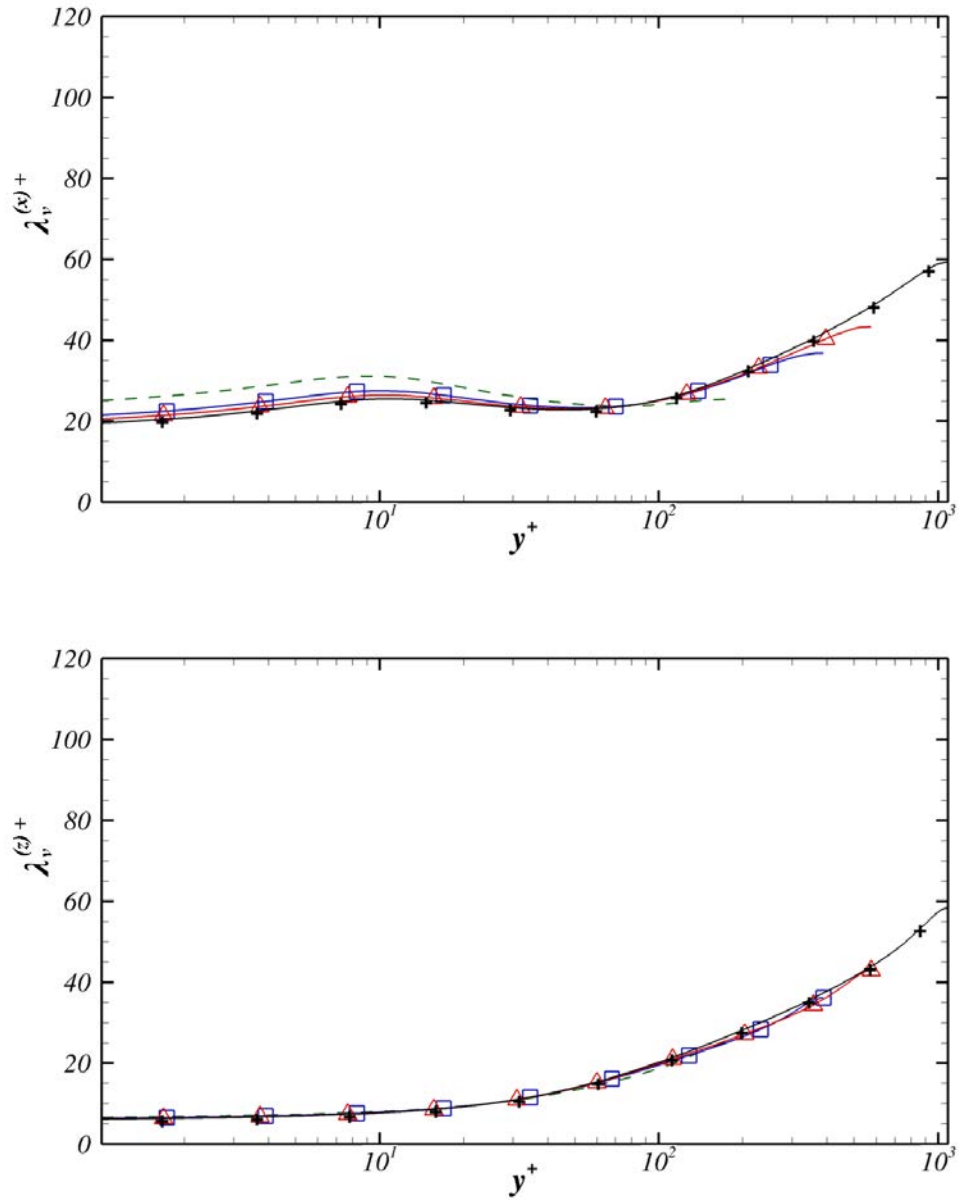


FIGURE 9.4 – Échelles de Taylor associées aux fluctuations de vitesse normale dans les directions longitudinale et transverse pour  $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$ .

dire que la densité de probabilité combinée  $p(u'_i, u'_j)$  obéit à la loi normale bivariée :

$$p(u'_i, u'_j) = \frac{1}{2\pi\sigma_{u_i}\sigma_{u_j}\sqrt{1-R_{u'_i u'_j}^2}} \exp \left[ \frac{1}{2(1-R_{u'_i u'_j}^2)} \left( \frac{u'^2_i}{\sigma_{u_i}^2} + \frac{u'^2_j}{\sigma_{u_j}^2} - \frac{2R_{u'_i u'_j} u'_i u'_j}{\sigma_{u_i}\sigma_{u_j}} \right) \right] \quad (9.18)$$

où  $R_{u'_i u'_j} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\sigma_{u_i}\sigma_{u_j}}$  est le coefficient de corrélation entre les fluctuations  $u'_i$  et  $u'_j$ . La densité de probabilité conditionnelle de  $u'_j$  sachant  $u'_i$  est alors donnée par la loi normale :

$$p(u'_j|u'_i) = \frac{p(u'_i, u'_j)}{p(u'_i)} = \frac{1}{\sigma_{u_j}\sqrt{2\pi(1-R_{u'_i u'_j}^2)}} \exp \left( \frac{(u'_j - u'_i R_{u'_i u'_j} \frac{\sigma_{u_j}}{\sigma_{u_i}})^2}{2(1-R_{u'_i u'_j}^2)\sigma_{u_j}^2} \right) \quad (9.19)$$

d'espérance  $\mathbb{E}(u'_j|u'_i) = u'_i R_{u'_i u'_j} \frac{\sigma_{u_j}}{\sigma_{u_i}}$  et d'écart type  $\sigma^2(u'_j|l_{u_i}) = (1-R_{u'_i u'_j}^2)\sigma_{u_j}^2$ . Si l'on suppose par ailleurs que  $u'_i$  est un signal gaussien, la moyenne de  $u'_j$  lors du franchissement du niveau  $l_{u_i}$  est équivalente à la moyenne biaisée  $\mathbb{E}(u'_j|l_{u_i}) = l_{u_i} R_{u'_i u'_j} \frac{\sigma_{u_j}}{\sigma_{u_i}}$  et s'écrit alors :

$$(\overline{u'_j})_{l_{u_i}} = l_{u_i} R_{u'_i u'_j} \frac{\sigma_{u_j}}{\sigma_{u_i}} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\sigma_{u_i}^2} l_{u_i} \quad (9.20)$$

La production moyenne au niveau  $l_{u_i}$  normalisée par la production moyenne locale  $\mathcal{P} = -\frac{\partial U}{\partial y} \overline{u'_i u'_j}$  s'exprime donc simplement comme :

$$\frac{\mathcal{P}_{l_{u_i} G}}{\mathcal{P}} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial y} l_{u_i} (\overline{u'_j})_{l_{u_i}}}{-\frac{\partial U}{\partial y} \overline{u'_i u'_j}} = l_{u_i}^{*2} \quad (9.21)$$

Comme mentionné précédemment, l'hypothèse de normalité conjointe a déjà été appliqué au cas d'une couche limite atmosphérique et s'est alors révélé relativement proche des contraintes de Reynolds mesurées [100]. Dans notre cas, les statistiques présentées dans la suite de ce chapitre sont globalement très différentes de la loi quadratique 9.21 et ne s'en approche que pour les fluctuations de faible intensité.

## 4.2 Statistiques de Palm unidirectionnelles

Les études expérimentales des franchissements de niveau menées dans la littérature [101, 102] sont restreintes à l'étude de signaux temporels de l'écoulement, du fait de l'impossibilité de couvrir l'intégralité du plan  $(x, z)$  par un réseau de sondes

suffisamment rapprochées. Dans notre cas, l'écoulement se déplace selon la direction longitudinale et les signaux spatiaux selon la direction  $x$  à  $z$  donné sont a priori analogues aux signaux temporels considérés dans la littérature. Bien que la simulation numérique offre la possibilité de détecter les franchissements de niveau dans les deux directions, il est intéressant dans un premier temps de se restreindre aux franchissements dans la direction longitudinale afin de pouvoir comparer les statistiques de Palm ainsi obtenues avec les statistiques de Palm obtenues expérimentalement.

La figure 9.5 montre la distribution de production normalisée selon le niveau  $l_u$  pour les franchissement du niveau  $l_u$  dans la direction longitudinale et transverse. Les statistiques de Palm dans la direction  $x$  sont comparées avec les résultats expérimentaux de Purushothaman [98] qui se répartissent convenablement autour des courbes obtenues. Les distributions longitudinale et transverse sont par ailleurs quasiment identiques, excepté pour les plus grandes valeurs de  $l_u$  où de légères différences peuvent être observées. Cette équivalence entre les distributions longitudinale et transverse a également été observée pour les statistiques de Palm basées sur la vitesse  $v$  et n'est pas surprenante du fait de l'homogénéité de l'écoulement dans les directions  $x$  et  $z$ . Le caractère limité des approches expérimentales aux franchissements temporels (et donc aux franchissements selon la direction  $x$ ) ne semble donc pas nuire à la qualité des statistiques de Palm, la prise en compte des franchissements dans la direction  $z$  ne pouvant modifier que marginalement les statistiques obtenues.

Cette vérification effectuée, les simulations numériques permettent d'étudier les franchissements de niveaux dans les directions  $x$  et  $z$  et il n'existe pas de raison particulière de privilégier une direction plutôt qu'une autre. Par la suite, on considérera donc la variante bidimensionnelle des statistiques de Palm permettant de tenir compte simultanément des franchissements avec les directions  $x$  et  $z$ . Les statistiques de Palm bidimensionnelles s'obtiennent de manière analogue aux statistiques de Palm unidimensionnelles à partir de la relation de Rice généralisée [103]. La valeur moyenne d'une quantité  $q$  lors du franchissement du niveau  $l_{u_i}$  par le signal  $u'_i(x, z)$  est alors donnée par :

$$\bar{q}_{l_{u_i}} = \frac{\mathbb{E} \left( [q \|\mathbf{grad}(u'_i)\|]_{u'_i=l_{u_i}} \right)}{\mathbb{E} \left( [\|\mathbf{grad}(u'_i)\|]_{u'_i=l_{u_i}} \right)} \quad (9.22)$$

On notera que la norme du gradient de  $u'_i(x, z)$ ,  $\|\mathbf{grad}(u'_i)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_i}{\partial z}\right)^2}$ ,

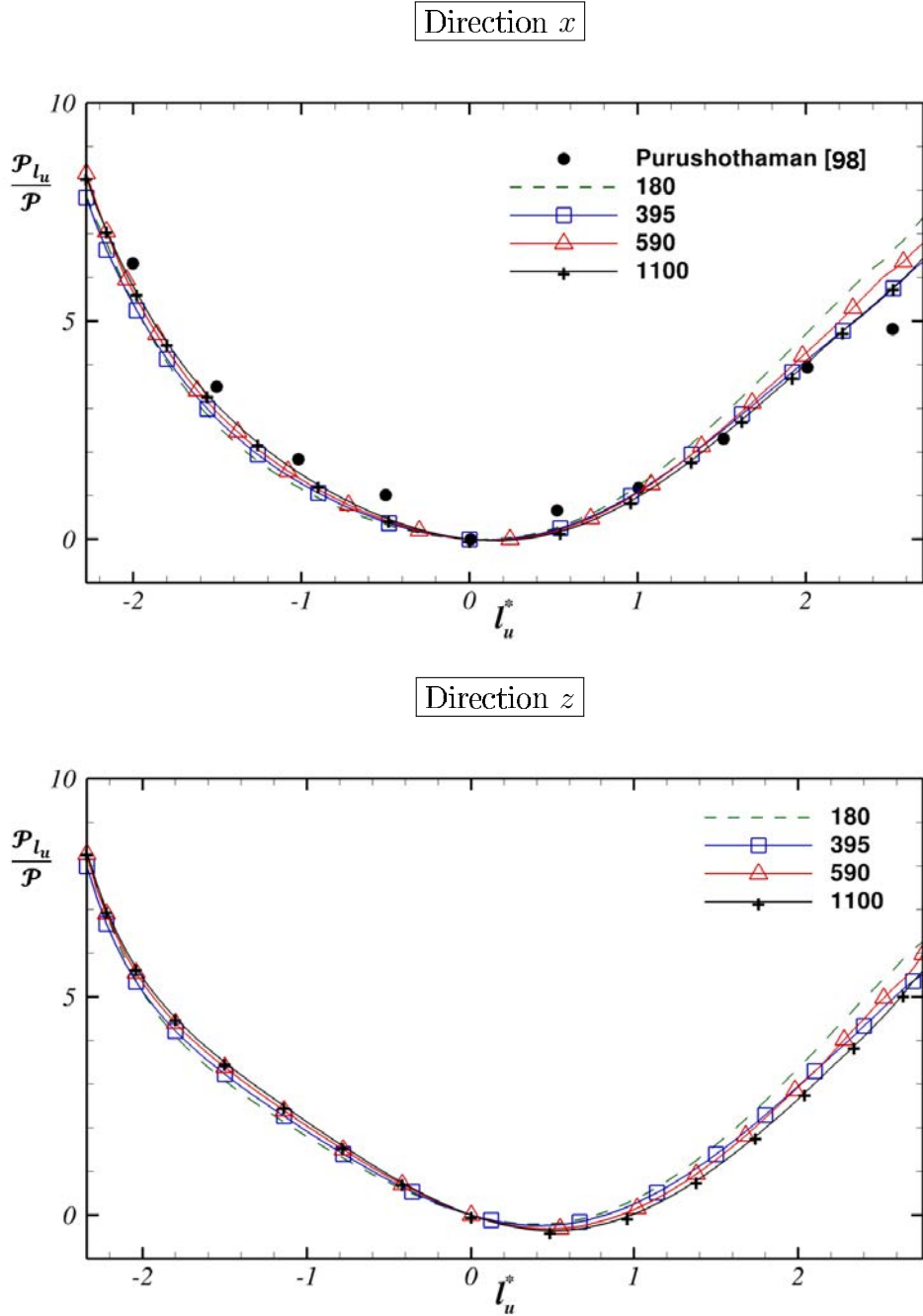


FIGURE 9.5 – Production moyenne non-biaisée pour les franchissements avec le niveau  $l_u$  dans les directions longitudinale (en haut) et transverse (en bas) à  $y^+ = 12$ . Les profils sont normalisés par la production moyenne à  $y^+ = 12$

joue ici un rôle équivalent à la valeur absolue de la dérivée signal pour le cas 1D.

### 4.3 Statistiques biaisées et non biaisées

Comme mentionné précédemment, les études précédemment réalisées sur les franchissements de niveau ne tiennent pas compte de la corrélation entre les valeurs  $q$  de la quantité moyennée et la pente du signal  $S$  et comportent un biais sur les moyennes alors calculées. De manière générale, la valeur de  $Q$  n'est pas indépendante du signal et l'approche biaisée n'est pas valable. On se propose ici de comparer les statistiques de Palm obtenues selon l'approche non biaisée et celle obtenue selon l'approche utilisée la littérature afin de démontrer l'intérêt de l'approche non-biaisée qui sera utilisée dans ce chapitre.

La figure 9.6 montre la production moyenne biaisées et non-biaisée pour les franchissement du niveau  $l_v$  par les fluctuations de vitesse  $v'$  à  $y^+ = 12$  et  $Re_\tau = 1100$ . Les productions moyennes sont calculées selon la relation 9.16 adaptée aux franchissements de niveau bidimensionnels où la vitesse moyenne  $\overline{u'_j}|_{l_{u_i}} = \overline{u'}_{l_v}$  au niveau  $l_v$  est donnée par les relations 9.8 et 9.22 dans les cas biaisé et non biaisé. Les valeurs moyennes biaisées  $\mathcal{P}_{l_v b}$  et non biaisées  $\mathcal{P}_{l_v}$  de la production sont donc calculées selon les relations :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{l_v} &= \frac{\partial U}{\partial y} l_v \frac{\mathbb{E}([u' \|\mathbf{grad}(v')\|]_{v'=l_v})}{\mathbb{E}([\|\mathbf{grad}(v')\|]_{v'=l_v})} \\ \mathcal{P}_{l_v b} &= \frac{\partial U}{\partial y} l_v \mathbb{E}(u' | v' = l_v)\end{aligned}\tag{9.23}$$

La différence significative (de l'ordre 40%) observée entre la production moyenne biaisée et non biaisée pour les niveaux positifs  $l_v > 0$  montre que la production n'est pas indépendante du gradient de la vitesse normale. Plus exactement, la relation 9.10 transposée au cas bidimensionnel suggère une corrélation négative entre la production et  $\|\mathbf{grad}(v')\|$ , la production moyenne non-biaisée étant supérieure à la production moyenne biaisée. Cette différence entre les moyennes biaisée et non-biaisée a été observée sur l'ensemble des statistiques de Palm obtenues et montre que l'erreur commise dans la littérature selon l'approche biaisée n'est pas négligeable. Par ailleurs, d'un point de vue numérique, la moyenne exacte n'est pas plus difficile à évaluer que la moyenne biaisée et il est préférable d'utiliser systématiquement la relation 9.22 indépendamment du degré de dépendance supposé entre la quantité  $q$  moyennée et le gradient de la vitesse  $u_i$  afin d'éviter toute ambiguïté sur



la qualité des statistiques obtenues. Par la suite, les statistiques de Palm seront donc déterminées uniquement selon l'approche non biaisée.

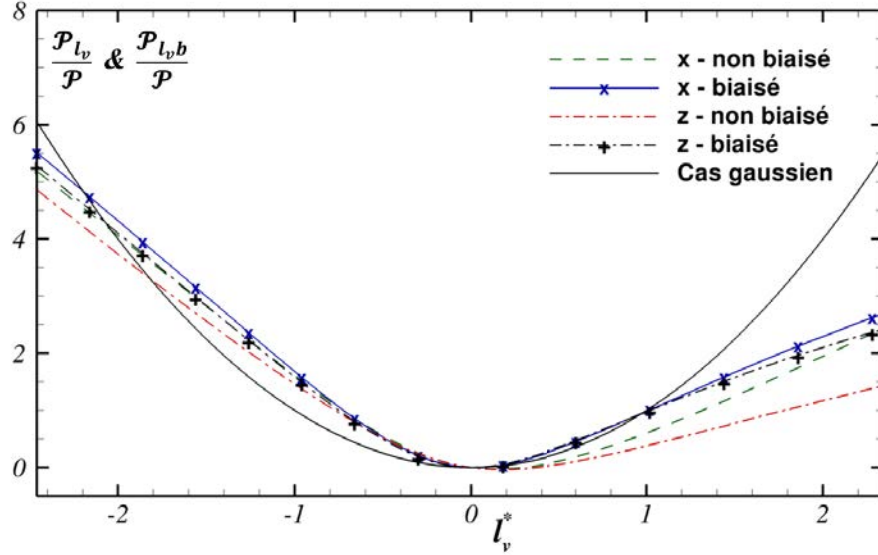


FIGURE 9.6 – Moyennes de production biaisée et non biaisée lors du franchissement bidimensionnel du niveau  $l_v$  par les fluctuations de vitesse  $v'$ , dans le plan  $y^+ = 12$  à  $Re_\tau = 1100$ . Les statistiques sont normalisées par la production moyenne en  $y^+ = 12$

## 4.4 Production dans la couche interne

### 4.4.1 Effet des balayages et des éjections sur les statistiques de Palm

La figure 9.7 montre la production moyenne lors des franchissements du niveau  $l_u$  par la vitesse longitudinale aux limites de la sous-couche visqueuse, en  $y^+ = 5$ . Les niveaux  $l_u < 0$  sont associés à des valeurs de production moyenne élevées et supérieures à celles prédites par le modèle gaussien. Ce caractère sur-gaussien peut s'expliquer par le phénomène d'éjection de fluide par les TQL qui alimente le quadrant II (QII :  $u' < 0, v' > 0$ ) en événements à vitesse élevée et contribue ainsi à augmenter la vitesse normale moyenne par rapport au cas gaussien. De la même manière, les balayages ( $u' > 0, v' < 0$ ) induisent une sur-représentation des valeurs fortement négatives de  $v'$  et devraient également se traduire par un comportement sur-gaussien pour le côté  $l_u > 0$ . Le caractère sous-gaussien de  $\mathcal{P}_{l_u}^* = \mathcal{P}_{l_u} / \mathcal{P}$  finalement observé est donc relativement surprenant et peut trouver une explication dans la zone  $0 < l_u < 1.5$  marquée par une production négative et donc une vitesse  $v'$

positive. Cette valeur positive de la vitesse normale moyenne ne peut s'expliquer que par une prédominance des événements du quadrant I (QI :  $u' > 0, v' > 0$ ), correspondant à des fluctuations positives de  $u'$  et  $v'$ . L'effet des balayages est d'une certaine manière noyé par les événements QI et n'est ainsi pas décelable dans les statistiques de Palm basées sur la vitesse longitudinale.

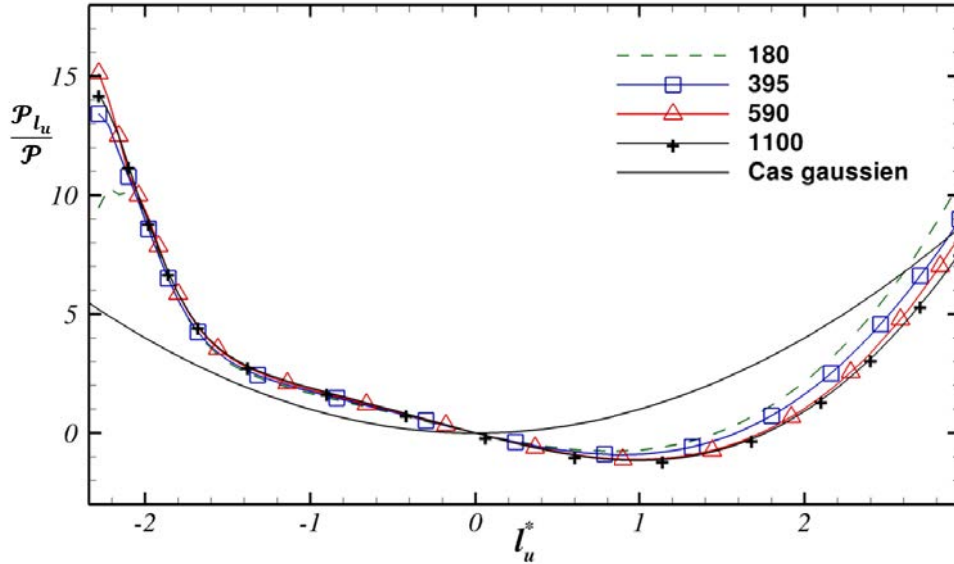


FIGURE 9.7 – Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements du niveau  $l_u$  par les fluctuations de vitesse  $u'$  aux limites de la sous-couche visqueuse en  $y^+ = 5$ .

La « contamination » des statistiques de Palm par les événements QI est confirmée par la figure 9.8 qui montre la production moyenne  $\mathcal{P}_{l_v}^* = \mathcal{P}_{l_v}/\mathcal{P}$  aux franchissements du niveau  $l_v$  par la vitesse  $v$ . Cette quantité est également fortement affectée par les événements QI et est négative pour l'ensemble des niveaux  $l_v > 0$ . La déviation par rapport au cas gaussien pour les niveaux négatifs est plus prononcée que la déviation observée pour  $\mathcal{P}_{l_u}^*$  et suggère un effet important des balayages sur la production moyenne. Ce comportement est conforme avec les résultats de Kim et al. [7] selon lesquels la contribution à la production des événements QIV ( $u' > 0, v' < 0$ ), associés aux balayages, est d'environ 40% supérieure à la contribution des événements QII à proximité des parois. L'importance relative des balayages et des éjections s'inverse à partir de  $y^+ = 12$  où les éjections deviennent dominantes [7]. Cette prédominance des éjections au-delà de  $y^+ = 12$  est relativement cohérente avec les moyennes de Palm  $\mathcal{P}_{l_u}^*$  et  $\mathcal{P}_{l_v}^*$  de la production en  $y^+ = 12$  et en  $y^+ = 50$

représentées dans les figures 9.9 et 9.10. La production  $\mathcal{P}_{l_u}^*$  est en effet supérieure au cas gaussien ainsi qu'à  $\mathcal{P}_{l_v}^*$  pour l'ensemble des niveaux négatifs ( $l_u, l_v < 0$ ).

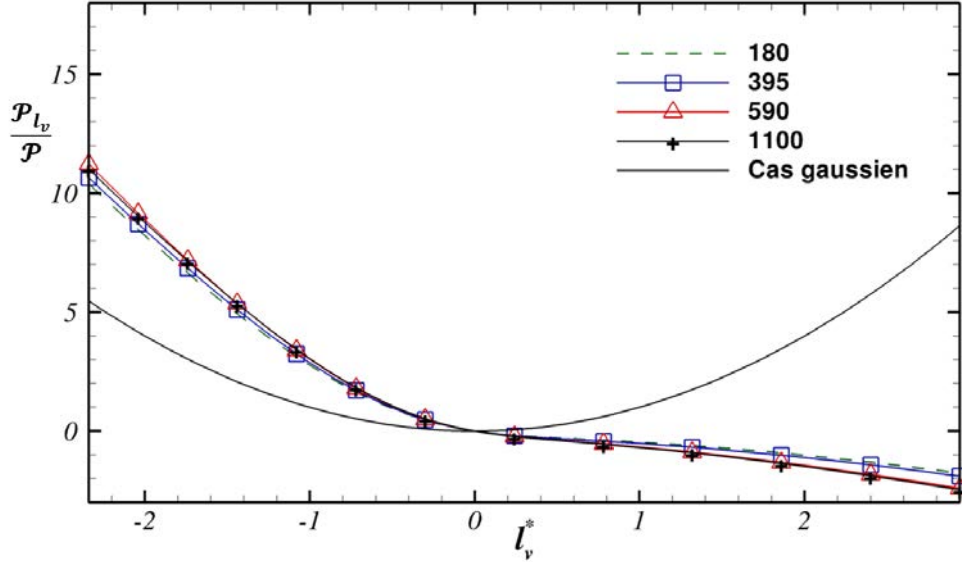


FIGURE 9.8 – Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements du niveau  $l_v$  par les fluctuations de vitesse  $v'$  aux limites de la sous-couche visqueuse en  $y^+ = 5$

#### 4.4.2 Dépendance du niveau $l$ avec le nombre de Reynolds

La dépendance de la production conditionnée  $\mathcal{P}_{l_{u_i}}^* = -\frac{\sigma_{u_i}}{\overline{u_i u_j}} (\overline{u'_j})_{l_{u_i}} l_{u_i}$  avec le nombre de Reynolds peut être décomposée en deux contributions : une contribution « globale » indépendante du niveau considéré liée au facteur  $\frac{\sigma_{u_i}}{\overline{u_i u_j}}$  et une contribution liée au niveau associée à la quantité  $(\overline{u'_j})_{l_{u_i}}$ . D'un point de vue physique, la contribution du niveau  $l$  dépend directement des échelles gouvernant les fluctuations d'intensité  $l$  : l'indépendance d'un niveau avec le nombre de Reynolds suggère que les fluctuations sont engendrées par les petites structures gouvernées par les échelles internes tandis qu'une forte dépendance suggère, au contraire, qu'une portion significative des fluctuations d'intensité  $l$  est générée par les grandes structures de l'écoulement.

La figure 9.11 présente la moyenne de Palm  $(\overline{v'^+})_{l_u}$  de la vitesse normale au niveau  $l_u$  à la distance  $y^+ = 12$  correspondant au maximum de la production moyenne. Les courbes se rejoignent vers les niveaux élevés correspondant à des événements importants et intermittents. L'indépendance de ces niveaux avec le nombre

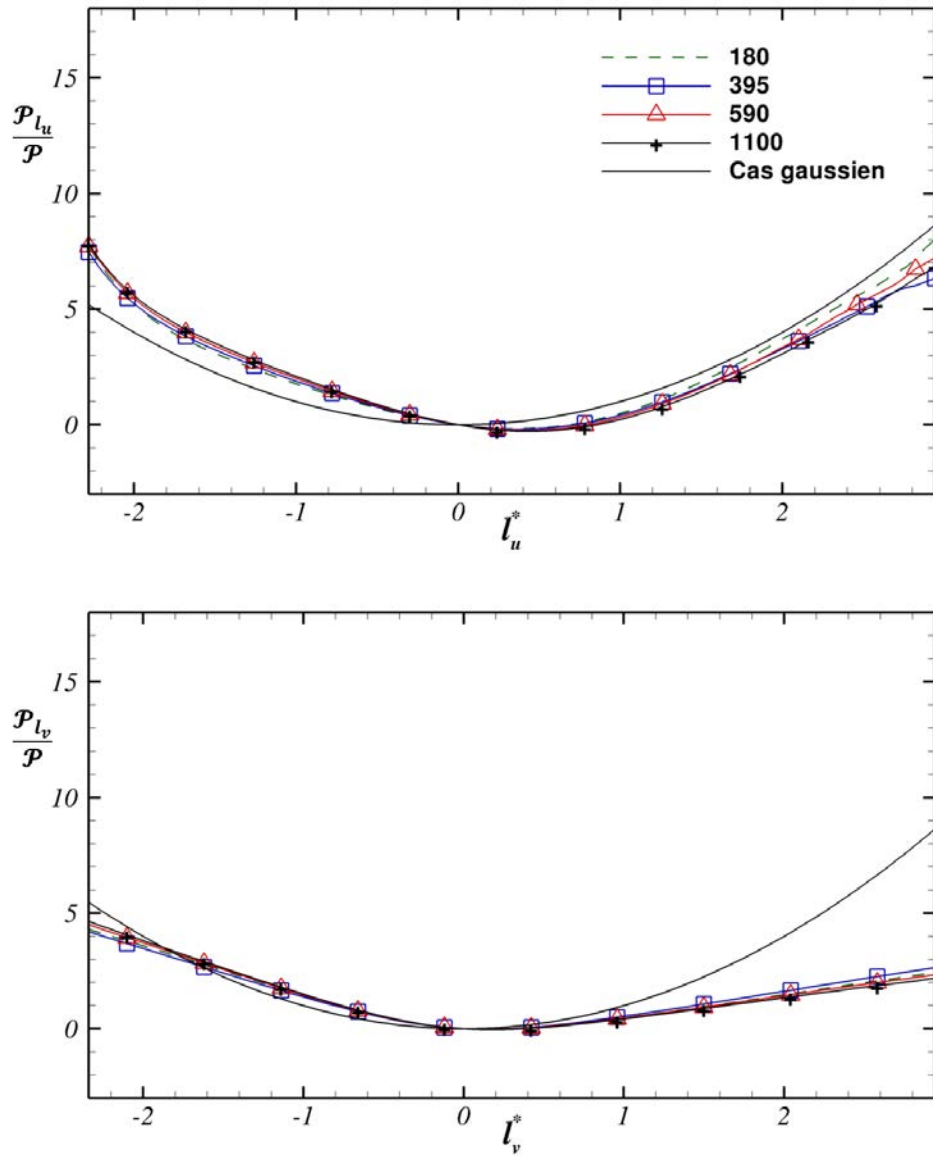


FIGURE 9.9 – Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements des niveaux  $l_u$  et  $l_v$  par les fluctuations de vitesse  $u'$  (en haut) et  $v'$  (en bas) aux limites en  $y^+ = 12$

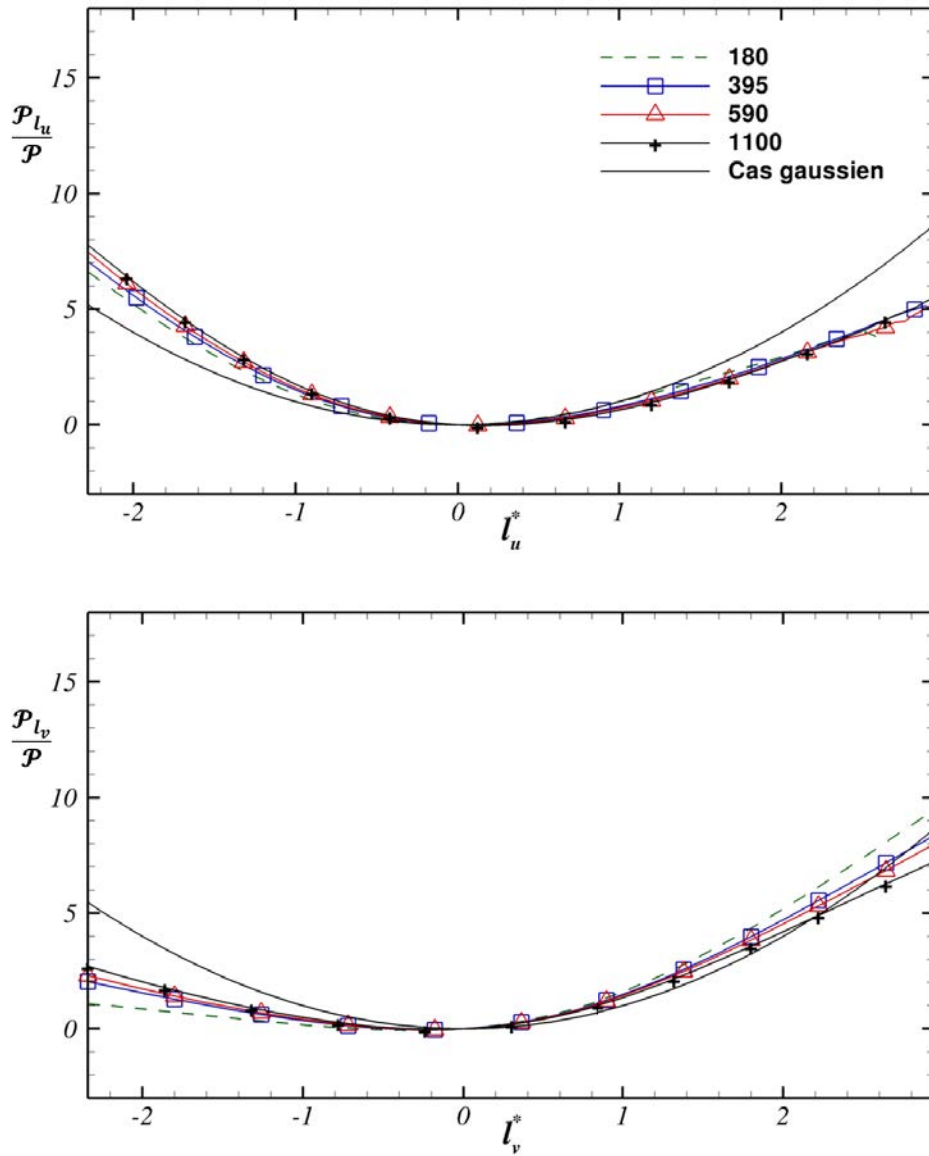


FIGURE 9.10 – Moyenne de Palm non biaisée de la production basée sur les franchissements des niveaux  $l_u$  et  $l_v$  par les fluctuations de vitesse  $u'$  (en haut) et  $v'$  (en bas) aux limites en  $y^+ = 50$

de Reynolds n'est pas surprenante au regard de la nature très localisée de ces fluctuations qui mesurent approximativement  $2\Delta x$  dans la direction longitudinale et  $\Delta z$  dans la direction transverse, et sont donc essentiellement associées aux petites échelles de l'écoulement.

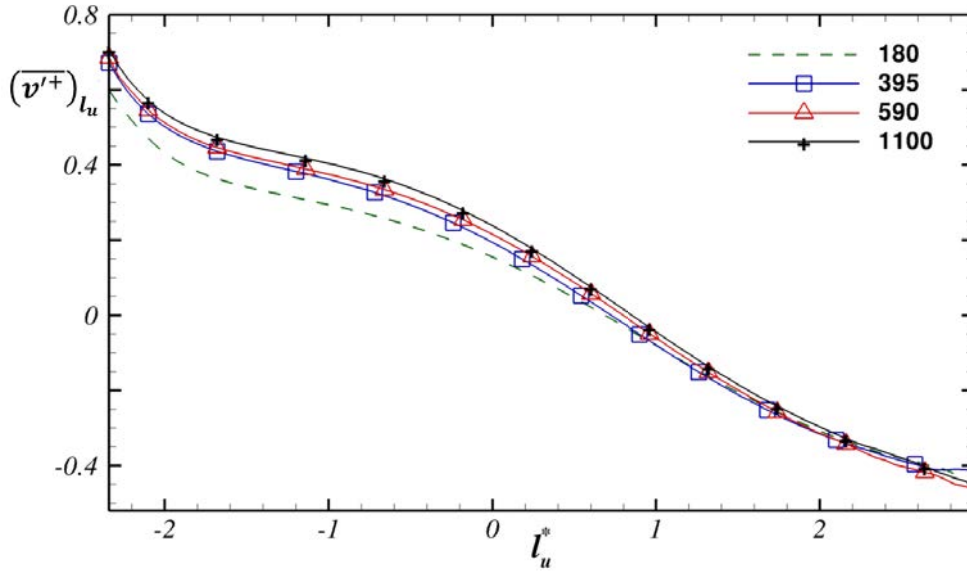


FIGURE 9.11 – Moyenne de Palm non biaisée de la vitesse normale basée sur les franchissements du niveau  $l_u$  par les fluctuations de vitesse  $u'$  en  $y^+ = 12$

La dépendance de  $(v'^+)_{l_u}$  avec le nombre de Reynolds pour les niveaux  $l_u$  intermédiaires peut être analysée selon une approche analogue à celle de Pantou [75] qui consiste à décomposer les fluctuations de vitesse  $u'$  en une composante active  $u'_A$  pouvant induire des fluctuations  $v'$  de vitesse normale et une composante passive  $u'_P$  ne contribuant pas à la production. Afin de simplifier l'analyse qui va suivre on ne considère ici que la moyenne biaisée  $\mathbb{E}([v'^+]_{u=l})$  de la vitesse normale au niveau  $l_u$ , que l'on peut exprimer à partir de  $u^+$  et de  $u_A^+$  selon la relation de Chapman-Kolmogorov :

$$\mathbb{E}([v'^+]_{u^+}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}([v'^+]_{u_A^+, u^+}) p([u_A^+]_{u^+}) du_A^+ \quad (9.24)$$

Par ailleurs, les fluctuations de  $v'$  sont par définition indépendantes de la composante passive  $u'_P$  et présentent donc la même dépendance avec  $u'_A$  qu'avec  $u'$ . La

moyenne  $\mathbb{E}([v'^+]_{u'^+, u'^+})$  se réduit donc à :

$$\mathbb{E}([v'^+]_{u'^+, u'^+}) = \mathbb{E}([v'^+]_{u'^+}) \quad (9.25)$$

et la moyenne biaisée s'écrit finalement :

$$\mathbb{E}([v'^+]_{u'^+}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}([v'^+]_{u'^+}) p([u'^+]_{u'^+}) du'^+ \quad (9.26)$$

La composante  $u'_A$  est contrôlée uniquement par les échelles internes et la moyenne  $\mathbb{E}([v'^+]_{u'^+})$  ne présente pas de dépendance avec le nombre de Reynolds. La dépendance finalement observée pour les niveaux intermédiaires provient donc uniquement de la densité de probabilité conditionnelle  $p([u'^+]_{u'^+})$ . On notera que l'approche de Panton utilisée ici permet également de retrouver la production de Palm dans le cas où  $u'_A$  et  $v'$  sont conjointement normales. Ce résultat est détaillé dans l'article de l'annexe B où l'hypothèse de normalité conjointe est appliquée aux approches de Panton [75] et de Marusic et al. [94].

#### 4.4.3 Comparaison avec le cas gaussien

Dans le cas particulier où les fluctuations  $u'_i$  et  $u'_j$  sont conjointement normales, la moyenne de Palm  $(\overline{u'_j})_{l_{u_i}}$  est identique à la moyenne biaisée et s'écrit d'après la relation 9.20 :

$$(\overline{u'_j})_{l_{u_i}} = \mathbb{E}([u'_j]_{u'_i=l_{u_i}}) = R_{u'_i u'_j} \sigma_{u_j} l_{u_i}^* \quad (9.27)$$

où  $R_{u'_i u'_j}$  est le coefficient de corrélation entre les fluctuations  $u'_i$  et  $u'_j$ . La moyenne de Palm  $(\overline{u'^*_j})_{l_{u_i}}$  normalisée par  $R_{u'_i u'_j} \sigma_{u_j}$  est alors indépendante du nombre de Reynolds et de la position  $y$  considérée et est donnée par la relation linéaire :

$$(\overline{u'^*_j})_{l_{u_i}} = -l_{u_i}^* \quad (9.28)$$

La figure 9.12 compare les courbes de la moyenne de Palm  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  avec la relation 9.28 donnée par l'hypothèse de normalité conjointe en  $y^+ = 12$  et  $y^+ = 120$ . On remarque tout d'abord que, à  $y^+ = 12$ , la vitesse normale moyenne se situe clairement au-dessus de la droite  $(\overline{v'^*})_{l_u} = -l_u^*$  pour l'ensemble des niveaux  $l_u$  considérés et est donc conforme avec le comportement observé pour la production, sur-gaussien à  $l_u < 0$  et sous-gaussien à  $l_u > 0$ . Un autre point important est que l'écart entre les courbes et le cas gaussien est relativement élevé et ne permet donc pas de retenir

l'hypothèse de normalité conjointe comme un modèle acceptable pour l'étude de la turbulence de parois. On notera toutefois que les courbes de  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  se rapprochent progressivement du cas gaussien, de manière analogue aux statistiques de la production, au fur et à mesure que la distance  $y$  augmente et présentent un comportement quasiment linéaire en  $y^+ = 120$ .

Il est intéressant de remarquer que les variations de  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  en fonction du nombre de Reynolds et de la position  $y$  sont significativement atténuées par rapport aux variations observées pour la moyenne de Palm  $(\overline{v'^+})_{l_u}$  exprimée dans les échelles internes : le paramètre  $R_{u'v'}\sigma_v$  est donc responsable d'une partie des variations de  $(\overline{v'^+})_{l_u}$  avec le nombre de Reynolds. La figure 9.13 montre, au niveau  $l_u = -1$  en  $y^+ = 12$  et  $y^+ = 120$ , l'évolution de la moyenne de Palm  $(\overline{v'})_{l_u}$  en fonction de  $Re_\tau$  selon l'échelle utilisée (échelle interne ou  $R_{u'v'}\sigma_v$ ). Afin de faciliter la comparaison, les moyennes  $(\overline{v'^+})_{l_u}$  et  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  sont normalisées par leurs valeurs respectives à  $Re_\tau = 180$ . Les données présentent une dépendance linéaire avec le nombre de Reynolds analogue à celle observée pour l'intensité turbulente de la vitesse longitudinale. Dans le cas  $y^+ = 12$ , la moyenne de Palm  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  varie en  $0.11 \ln(Re_\tau)$  et est moins sensible au nombre de Reynolds que la moyenne de Palm  $(\overline{v'^+})_{l_u}$  exprimée dans les échelles internes, qui varie selon  $0.22 \ln(Re_\tau)$ . De manière analogue aux autres quantités de l'écoulement, la dépendance avec le nombre de Reynolds, relativement modérée à  $y^+ = 12$ , augmente sensiblement au-delà des parois et les statistiques de Palm exprimées dans les échelles internes varient en  $0.5 \ln(Re_\tau)$  à  $y^+ = 120$ . Enfin, la normalisation par le paramètre  $R_{u'v'}\sigma_v$  permet là encore de réduire significativement la dépendance de la moyenne de Palm avec le nombre de Reynolds qui varie alors en  $0.15 \ln(Re_\tau)$  et confirme l'influence du paramètre  $R_{u'v'}\sigma_v$  dans les statistiques de Palm dans l'ensemble du canal.

Des résultats analogues ont été obtenus pour la vitesse longitudinale pour laquelle l'utilisation de l'échelle  $R_{u'v'}\sigma_u$  conduit également à une diminution significative de la dépendance avec le nombre de Reynolds. Ces résultats montrent l'importance des paramètres  $R_{u'v'}\sigma_v$  et  $R_{u'v'}\sigma_u$  sur les moyennes conditionnelles  $(\overline{v'})_{l_u}$  et  $(\overline{u'})_{l_v}$  et constituent une première étape dans la construction d'une échelle de vitesse pour ces quantités. Par ailleurs, la comparaison des profils de  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  à  $y^+ = 12$  et  $y^+ = 120$  (figure 9.12) suggère que la vitesse conditionnelle  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  se rapproche progressivement du cas gaussien au fur et à mesure que la distance aux parois augmente. Afin de confirmer cette évolution, on se propose dans la figure 9.14, de considérer les moyennes des vitesses conditionnelles  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  et  $(\overline{u'^*})_{l_v}$  exprimées dans leurs échelles



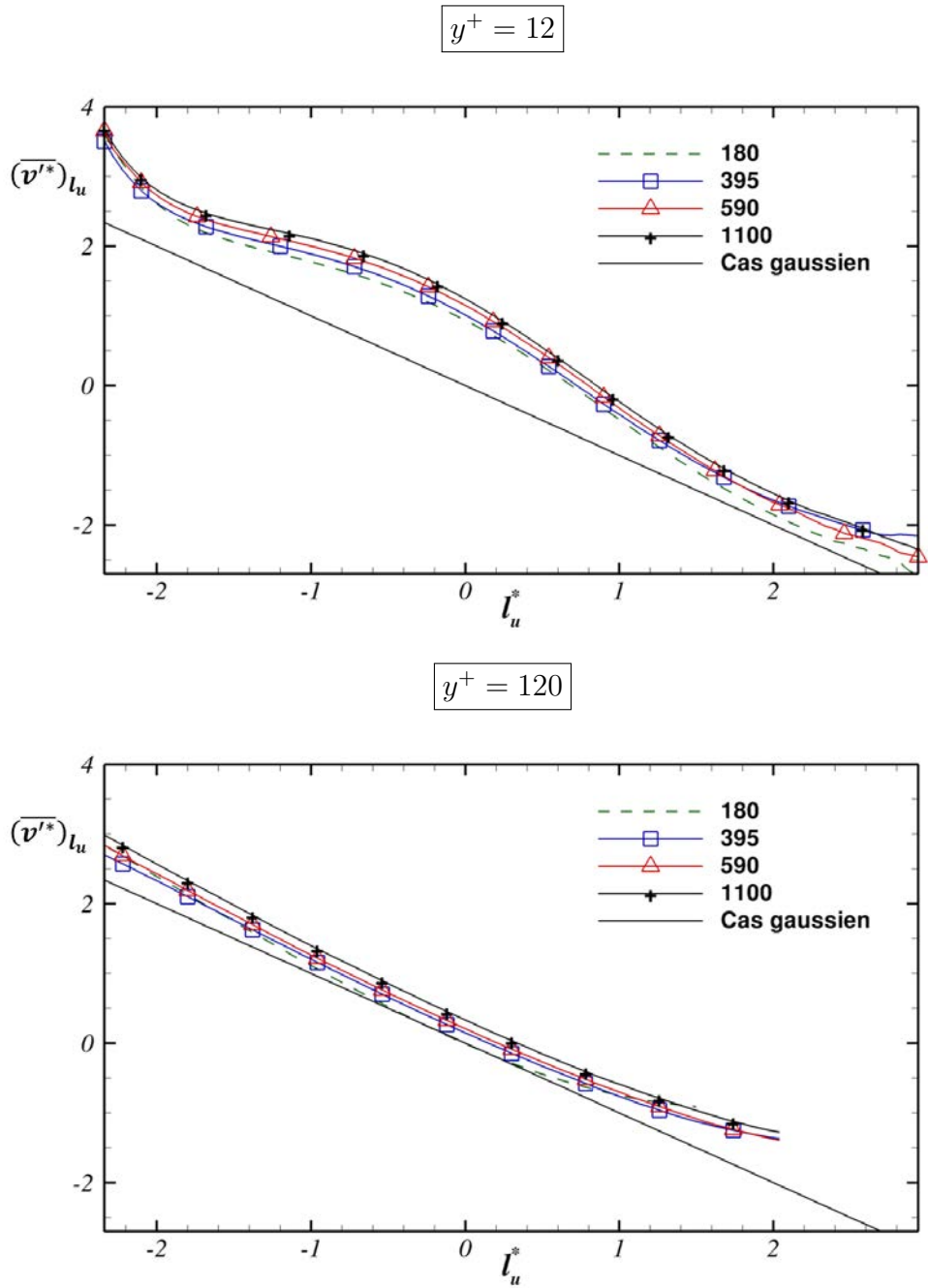


FIGURE 9.12 – Moyenne de Palm  $(\overline{v^*})_{l_u}$  normalisée par  $R_{u'v'}\sigma_v$  en  $y^+ = 12$  et  $y^+ = 120$

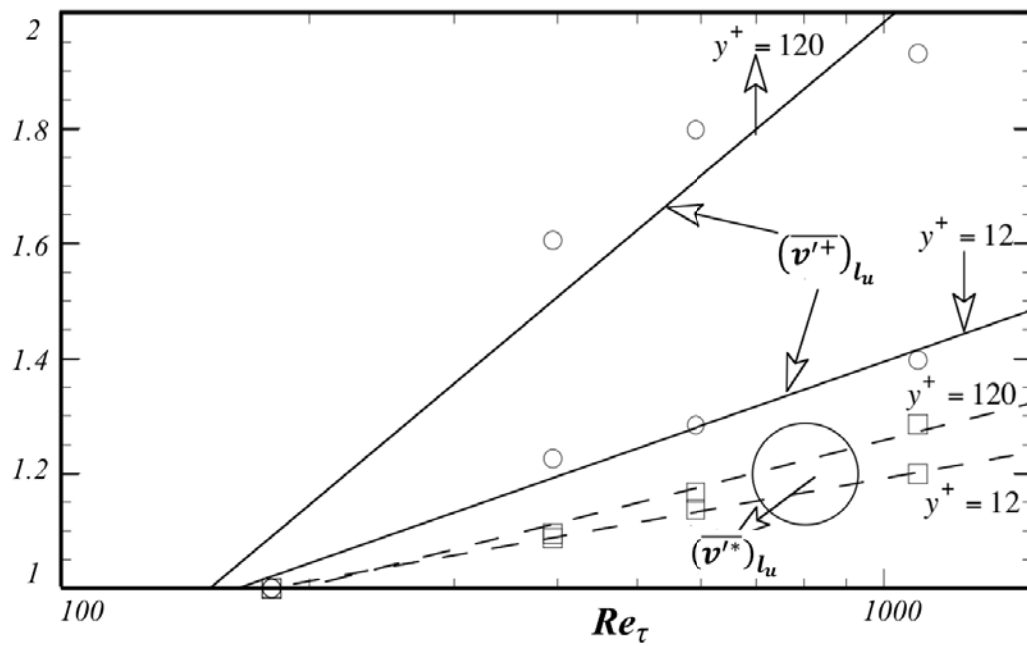


FIGURE 9.13 – Variations de la moyenne de Palm  $(\overline{v'^+})_{l_u}$  exprimée dans les échelles internes et de la moyenne  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  normalisée par le paramètre  $R_{u'v'}\sigma_v$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_\tau$

respectives ( $R_{u'v'}\sigma_v$  et  $R_{u'v'}\sigma_u$ ) en  $y^+ = [5, 10, 12, 30, 50, 120, 200]$  à  $Re_\tau = 1100$ . On remarque tout d'abord que la plupart des courbes évoluent autour du cas gaussien à l'exception notable des vitesses conditionnelles à proximité de la paroi ( $y^+ \leq 12$ ). Cette région est en effet caractérisée par une forte intermittence due aux éjections et aux balayages induits par les TQL et ne peut donc pas être convenablement décrite par l'hypothèse de normalité conjointe. Au-delà, les courbes se rapprochent progressivement du cas gaussien pour les  $y^+$  croissants. Les courbes en  $y^+ = 120$  et  $y^+ = 200$  notamment sont relativement proches du cas gaussien bien que légèrement au-dessus. Cette évolution n'est pas surprenante au regard des profils du facteur d'aplatissement présentés dans le chapitre 7 (figure 7.10) qui montrent que le comportement intermittent des fluctuations de vitesse, très prononcé à proximité des parois, décroît au fur et à mesure que la distance aux parois augmente.

## 5 Conclusions

Ce chapitre se propose d'étudier l'impact des fluctuations de vitesse sur la production en fonction de leur intensité à partir des statistiques de Palm de la production. Une des particularités de cette étude réside dans l'utilisation de la moyenne exacte, donnée par la relation 9.6, qui découle directement de la distribution de Palm (relation 9.4) et qui dépend conjointement de la valeur de la quantité  $q$  considérée et de sa variation  $\eta$  en temps ou en espace. Le calcul de la moyenne selon la relation 9.8, habituellement utilisée dans la littérature, revient à supposer que les valeurs  $q$  du signal et de sa pente  $\eta$  sont des quantités statistiquement indépendantes et peut introduire un biais sur les moyennes ainsi calculées. Ce biais a été confirmé par la comparaison des statistiques de Palm calculées selon la relation biaisée et selon la relation exacte réalisée dans la section 4.3.

L'activité des franchissements de niveau, définie par la fréquence des franchissements dans une direction donnée, est relativement proche de l'activité d'un signal gaussien et est donc approximativement inversement proportionnelle à l'échelle de Taylor des fluctuations dans la direction considérée. La fréquence des franchissements de niveau dans la direction transverse est ainsi systématiquement plus élevée que dans la direction longitudinale, où les échelles de Taylor sont plus élevées. Par ailleurs, la vitesse normale  $v$  génère davantage de franchissements que la vitesse  $u$  comme le suggère la comparaison des échelles de Taylor de  $u$  et de  $v$ .

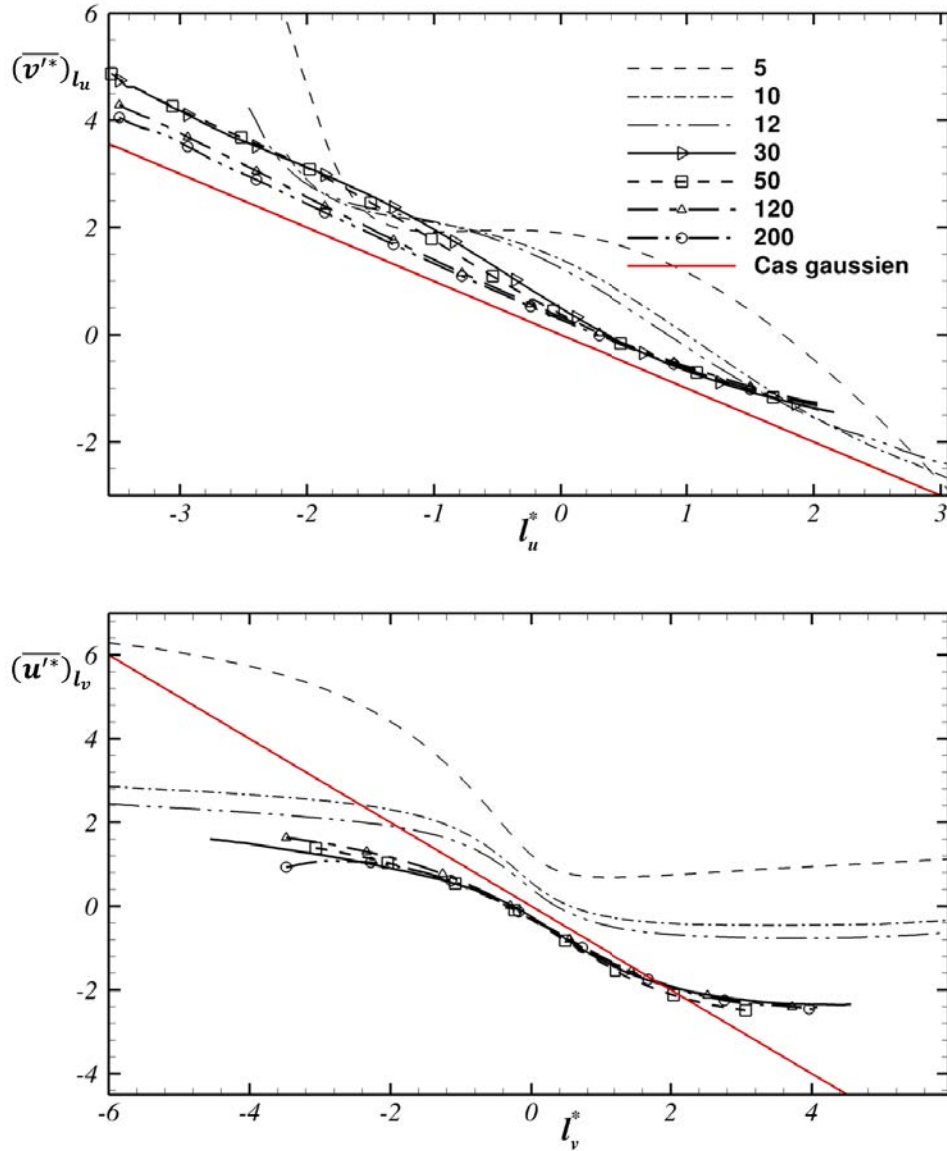


FIGURE 9.14 – Moyennes de Palm  $(\overline{v'^*})_{l_u}$  et  $(\overline{u'^*})_{l_v}$  des fluctuations de vitesse normale et longitudinale normalisées respectivement par  $R_{u'v'}\sigma_v$  et  $R_{u'v'}\sigma_u$  à  $Re_\tau = 1100$  en  $y^+ = [5, 10, 12, 30, 50, 120, 200]$ . Les droites  $(\overline{v'^*})_{l_u} = -l_u^*$  et  $(\overline{u'^*})_{l_v} = -l_v^*$  correspondent au cas où  $u'$  et  $v'$  sont conjointement normales

La production moyenne non biaisée  $\mathcal{P}_{l_{u_i}}$  diffère sensiblement des valeurs prédites pour le cas gaussien, où les fluctuations de vitesse  $u'$  et  $v'$  sont considérées comme conjointement normales. Les événements incohérents ( $u' > 0$  et  $v' > 0$ ) jouent un rôle significatif et expliquent le caractère fortement sous-gaussien de  $\mathcal{P}_{l_{u_i}}$  pour les niveaux positifs de  $u'$  et de  $v'$ . Les niveaux négatifs sont fortement impactés par les balayages et les éjections et sont marqués par une production importante, largement supérieure aux valeurs prédites pour le cas gaussien. La dissymétrie entre les franchissements de niveau positifs et négatifs persiste dans la couche tampon où le cas gaussien reste relativement éloigné des statistiques de Palm obtenues.

Enfin, la moyenne de Palm de la vitesse normale a également été étudiée afin d'analyser la sensibilité des différents niveaux au nombre de Reynolds. Les niveaux intermédiaires présentent une dépendance notable de  $(\overline{v'})_{l_u}$  exprimée dans les échelles internes, modérée dans la couche interne ( $y^+ = 12$ ) mais qui s'accroît au-delà (voir figure 9.13). Les fluctuations extrêmes en revanche sont relativement insensibles à l'augmentation du nombre de Reynolds en raison de la taille très réduite des fluctuations associées. L'expression de  $(\overline{v'})_{l_u}$  selon l'échelle de vitesse  $R_{u'v'}\sigma_v$ , caractéristique du cas gaussien, permet de réduire sensiblement la dépendance avec le nombre de Reynolds. La quantité  $R_{u'v'}\sigma_v$  est donc responsable d'une partie de la dépendance de  $(\overline{v'})_{l_u}$  avec le nombre de Reynolds.

# Conclusion générale

Cette thèse a été consacrée à l'étude numérique d'un écoulement en canal et aura contribué à améliorer la compréhension de la turbulence et de ses effets à travers une analyse approfondie de la sensibilité des statistiques de l'écoulement au nombre de Reynolds. Le volet numérique de cette thèse aura par ailleurs permis de développer un code DNS fortement parallèle et permettant de simuler une grande variété de configurations d'écoulement.

La première étape de cette thèse a été d'étudier les différentes stratégies de parallélisation existantes afin d'identifier les approches permettant d'obtenir une accélération suffisante du code. Le parallélisme à mémoire distribuée couplé avec une décomposition 2D du domaine de calcul a été retenu pour son efficacité et sa simplicité. Dans le cas de la plus grosse simulation ( $Re_\tau = 1100$ ), l'utilisation de cette approche a permis de mobiliser 16384 processeurs sur le calculateur TURING et d'exploiter au maximum la puissance de calcul mise à notre disposition. Des schémas de différence finie à haute précision, explicites optimisés ou compacts, ont également été intégrés dans le code DNS afin de réduire la taille des maillages utilisés par rapport aux schémas d'ordre 2 initialement utilisés.

La phase de développement du code s'est achevée sur l'implémentation d'écoulements plus complexes que ceux initialement accessibles au code DNS et a permis la simulation d'un écoulement autour d'un corps immergé chauffant. L'approche « frontière immergée » implémentée permet d'obtenir des résultats proches de ceux publiés dans la littérature mais comporte cependant certaines limitations. La précision pourrait notamment être grandement améliorée en ajustant la vitesse aux points bordant la surface du corps (en fonction de leur distance à cette dernière) afin de mieux tenir de compte de la forme réelle du corps. Par ailleurs, il serait intéressant de pouvoir appliquer un raffinement du maillage autour du corps immergé. Ce raffinement pourrait être réalisé par l'utilisation d'une approche multigrille pour la résolution de l'équation de Poisson qui, bien que plus coûteuse que la résolution

spectrale pure utilisée, offrirait une grande généricité dans le choix du maillage.

Enfin, les développements effectués sur le code ont permis d'améliorer fortement sa généricité et ouvrent la voie à la simulation de configurations d'écoulement très variées, au-delà des écoulements considérés dans cette thèse. Par exemple, la possibilité d'injecter un écoulement en entrée du domaine combinée avec l'utilisation d'une condition de sortie ouverte pourrait permettre la simulation d'écoulements de couche limite. Les récents développements effectués autour du transport d'un scalaire actif, en cours de validation, permettent d'envisager la simulation d'écoulements faisant interagir des quantités physiques diverses (magnétohydrodynamique, thermique, ...). Un exemple parmi d'autres est la simulation du transport des bulles générées à la surface d'une électrode verticale dans les configurations usuelles d'électrolyseur pour la production d'hydrogène. Le cas d'un écoulement à bulles a par ailleurs récemment été intégré au code et est actuellement en phase de validation.

La seconde étape de la thèse a été consacrée à la simulation d'écoulements modérément turbulents et à l'étude des effets du nombre de Reynolds sur les statistiques de l'écoulement. Les statistiques les plus communes présentées dans ce travail appuient les observations et les conclusions émises dans les rares études numériques [38, 6] réalisées dans la littérature pour des nombres de Reynolds équivalents. Tout d'abord, la sensibilité des différentes composantes de l'intensité turbulente est conforme aux résultats présentés par Hoyas et al. [38] et conforte le modèle de Townsend [4], selon lequel les grandes structures de l'écoulement affectent essentiellement les fluctuations de vitesse longitudinale et transverse et n'ont pas d'effet sur la production. Cette interprétation est confirmée par l'invariance des spectres de  $u'v'$  et  $v'$  avec le nombre de Reynolds tandis qu'à l'inverse, les spectres de  $u'$  et  $w'$  sont marqués par le développement d'une excroissance dans la région des grandes longueurs d'onde, qui traduit l'effet des échelles externes.

L'effet des grandes échelles sur la physique de la couche interne, et plus particulièrement sur la contrainte pariétale, a également été observé à travers l'étude des corrélations entre les fluctuations de vitesse en  $y^+ = 10$  et de la contrainte pariétale  $\tau'_w$ . L'étude expérimentale de Naguib et al. [54] a été adaptée à la simulation numérique directe à travers un filtrage de la solution numérique dans le plan  $x - z$  afin d'éliminer les fluctuations associées aux grandes structures. La corrélation  $u' - \tau'_w$  des champs filtrés est relativement faible et montre que les petites structures pénètrent peu dans la sous-couche visqueuse. Inversement, la corrélation  $u' - \tau'_w$  est plus élevée dans le cas des champs non filtrés et indique que les grandes structures

pénètrent mieux la sous-couche visqueuse et ont un effet notable sur les fluctuations de vitesse dans cette zone. L'analyse des corrélations  $u' - u'$  en deux points dans la direction transverse des champs filtrés a également permis de déterminer le diamètre des structures longitudinales ( $\mathcal{D}^+ = 25$ ) ainsi que leur espacement moyen ( $\mathcal{L}_z^+ = 50$ ). Ces données sont en accord avec les observations expérimentales [89, 90].

L'utilisation de l'approche de simulation numérique directe nous aura permis d'obtenir des estimations fiables et précises des termes des équations de transport et de réaliser une étude approfondie couvrant différents aspects du transport turbulent (échelles caractéristiques et génération notamment). L'analyse des termes de transport des contraintes de Reynolds confirme la pertinence de l'échelle  $u_\tau^3/y$  proposée par Hoyas et al. [80] dans la couche de recouvrement. La situation est plus complexe dans la couche interne où la forte sensibilité au nombre de Reynolds des différents termes exprimés dans les échelles internes montre l'insuffisance de ces échelles à caractériser la dynamique des contraintes de Reynolds dans cette zone. L'étude de différentes approximations pour l'estimation expérimentale de la dissipation réalisée par Antonia et al. [87] à  $Re_\tau = 180$  et  $Re_\tau = 395$  a par ailleurs été reprise et permet de confirmer la pertinence de ces approximations pour les nombres de Reynolds plus élevés considérés ici.

L'analyse des différents termes de transport de vorticité est conforme à l'idée que la vorticité longitudinale, responsable d'une partie significative de la traînée, provient de l'inclinaison de la vorticité normale par l'écoulement moyen, elle-même générée par la vorticité transverse. Dans ce cas, la proximité du pic de production de la vorticité transverse avec les parois ( $y^+ = 3$ ) est particulièrement intéressante et pourrait permettre de réduire efficacement la vorticité longitudinale et la traînée en limitant la production de vorticité transverse par des actions adaptées sur la paroi.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse a été consacré à l'étude des statistiques de Palm de la production, c'est à dire à l'étude de la moyenne de la production lorsque les fluctuations de vitesse franchissent un seuil donné. Bien que peu utilisé dans la littérature, cet outil permet d'étudier l'effet des fluctuations de vitesse sur la production en fonction de leur intensité et est donc particulièrement utile pour caractériser les échelles de vitesse impliquées dans la production de l'énergie turbulente. La méthode de calcul de la moyenne à un niveau donné utilisée ici découle directement de la distribution de Palm et est différente de celle utilisée dans la littérature, qui ne tient pas compte de la corrélation entre la quantité moyennée et la



pente du signal et est donc qualifiée de biaisée.

Par ailleurs, les études menées dans la littérature sont souvent basées sur les franchissements de niveau dans une direction particulière et sont donc difficilement généralisables aux autres directions. L'étude des statistiques de Palm dans les deux directions du plan  $x - z$  montre que l'essentiel des franchissements de niveaux ont lieu dans la direction transverse et révèle l'importance de cette direction dans la production d'énergie turbulente. La prise en compte de cette donnée dans les stratégies de contrôle de la turbulence pourrait permettre d'améliorer significativement leur efficacité dans l'augmentation du mélange ou dans la réduction de la traînée.

# Bibliographie

- [1] Theodore Theodorsen. Mechanism of turbulence. In *Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics*, pages 1–18. Ohio State University, 1952.
- [2] Promode Bandyopadhyay. Large structure with a characteristic upstream interface in turbulent boundary layers. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 23(11) :2326–2327, 1980.
- [3] RJ Adrian, CD Meinhart, and CD Tomkins. Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 422 :1–54, 2000.
- [4] Albert A Townsend. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge university press, 1976.
- [5] Javier Jiménez. Computing high-Reynolds-number turbulence : will simulations ever replace experiments ?\*. *Journal of Turbulence*, 4(22) :1–14, 2003.
- [6] Myoungkyu Lee and Robert D Moser. Scale dependence of Reynolds stress transport in wall-bounded turbulence at  $Re_\tau = 5200$ . *Bulletin of the American Physical Society*, 59, 2014.
- [7] John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of fluid mechanics*, 177 :133–166, 1987.
- [8] Sylvain Laizet and Ning Li. Incompact3d : A powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $\mathcal{O}(10^5)$  computational cores. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(11) :1735–1757, 2011.
- [9] Paolo Orlandi. *Fluid flow phenomena : a numerical toolkit*, volume 1. Springer, 2000.
- [10] Richard S Hirsh. Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique. *Journal of computational physics*, 19(1) :90–109, 1975.

- [11] Sanjiva K Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of computational physics*, 103(1) :16–42, 1992.
- [12] Christopher KW Tam and Jay C Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of computational physics*, 107(2) :262–281, 1993.
- [13] Krishnan Mahesh. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution. *Journal of Computational Physics*, 145(1) :332–358, 1998.
- [14] Tapan K Sengupta, Gaurav Ganeriwal, and S De. Analysis of central and upwind compact schemes. *Journal of Computational Physics*, 192(2) :677–694, 2003.
- [15] Tapan K Sengupta, SK Sircar, and Anurag Dipankar. High accuracy schemes for DNS and acoustics. *Journal of Scientific Computing*, 26(2) :151–193, 2006.
- [16] GA Blaisdell, ET Spyropoulos, and JH Qin. The effect of the formulation of nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods. *Applied Numerical Mathematics*, 21(3) :207–219, 1996.
- [17] Man Mohan Rai and Parviz Moin. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. *Journal of computational physics*, 96(1) :15–53, 1991.
- [18] Man Mohan Rai and Parviz Moin. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. *Journal of Computational Physics*, 109(2) :169–192, 1993.
- [19] John A Ekaterinaris. Numerical simulation of incompressible two-blade rotor flowfields. *Journal of propulsion and power*, 14(3) :367–374, 1998.
- [20] Tetuya Kawamura, Hideo Takami, and Kunio Kuwahara. New higher-order upwind scheme for incompressible navier-stokes equations. In *Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 291–295. Springer, 1985.
- [21] Harvard Lomax, Thomas H Pulliam, and David W Zingg. Fundamentals of computational fluid dynamics. *NASA Ames Research Center-University of Toronto Institute for Aerospace Studies*, 1999.
- [22] Arnab Kumar De and Vinayak Eswaran. Analysis of a new high resolution upwind compact scheme. *Journal of Computational Physics*, 218(1) :398–416, 2006.
- [23] Xiaolin Zhong. High-order finite-difference schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer transition. *Journal of Computational Physics*, 144(2) :662–709, 1998.

- [24] Tapan K Sengupta and Yogesh G Bhumkar. New explicit two-dimensional higher order filters. *Computers & Fluids*, 39(10) :1848–1863, 2010.
- [25] Tapan K Sengupta, V Lakshmanan, and VVSN Vijay. A new combined stable and dispersion relation preserving compact scheme for non-periodic problems. *Journal of Computational Physics*, 228(8) :3048–3071, 2009.
- [26] Tapan K Sengupta, VVSN Vijay, and Swagata Bhaumik. Further improvement and analysis of CCD scheme : Dissipation discretization and de-aliasing properties. *Journal of Computational Physics*, 228(17) :6150–6168, 2009.
- [27] Qiang Zhou, Zhaohui Yao, Feng He, and MY Shen. A new family of high-order compact upwind difference schemes with good spectral resolution. *Journal of Computational Physics*, 227(2) :1306–1339, 2007.
- [28] Jae Wook Kim and Richard D Sandberg. Efficient parallel computing with a compact finite difference scheme. *Computers & Fluids*, 58 :70–87, 2012.
- [29] Tapan K Sengupta, Anurag Dipankar, and A Kameswara Rao. A new compact scheme for parallel computing using domain decomposition. *Journal of Computational Physics*, 220(2) :654–677, 2007.
- [30] Sylvain Laizet and Eric Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*, 228(16) :5989–6015, 2009.
- [31] Joel H Ferziger and Milovan Perić. *Computational methods for fluid dynamics*, volume 3. Springer Berlin, 2002.
- [32] Philippe R Spalart, Robert D Moser, and Michael M Rogers. Spectral methods for the navier-stokes equations with one infinite and two periodic directions. *Journal of Computational Physics*, 96(2) :297–324, 1991.
- [33] K.K.Q. Zhang, W.J. Minkowycz, and F. Mashayek. Exact factorization technique for numerical simulations of incompressible navier–stokes flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(3–4) :535 – 545, 2006.
- [34] Jae W Kim and Duck J Lee. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution. *AIAA journal*, 34(5) :887–893, 1996.
- [35] Hiroyuki Abe, Hiroshi Kawamura, and Haecheon Choi. Very large-scale structures and their effects on the wall shear-stress fluctuations in a turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 640$ . *Journal of Fluids Engineering*, 126(5) :835–843, 2004.
- [36] Robert D Moser, John Kim, and Nagi N Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Phys. Fluids*, 11(4) :943–945, 1999.

- [37] AW Vreman and JGM Kuerten. Comparison of direct numerical simulation databases of turbulent channel flow at  $Re_\tau = 180$ . *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(1) :015102, 2014.
- [38] Sergio Hoyas and Javier Jiménez. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Physics of Fluids (1994-present)*, 18(1) :011702, 2006.
- [39] Ning Li and Sylvain Laizet. 2DECOMP & FFT-A highly scalable 2D decomposition library and FFT interface. In *Cray User Group 2010 conference*, pages 1–13, 2010.
- [40] Felix Wolf, Brian JN Wylie, Erika Abrahám, Daniel Becker, Wolfgang Frings, Karl Förlinger, Markus Geimer, Marc-André Hermanns, Bernd Mohr, Shirley Moore, et al. Usage of the SCALASCA toolset for scalable performance analysis of large-scale parallel applications. In *Tools for High Performance Computing*, pages 157–167. Springer, 2008.
- [41] James W Demmel. *Applied numerical linear algebra*. Siam, 1997.
- [42] SL Lyons, TJ Hanratty, and JB McLaughlin. Direct numerical simulation of passive heat transfer in a turbulent channel flow. *International journal of heat and mass transfer*, 34(4) :1149–1161, 1991.
- [43] Jarrin Nicolas. *Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence*. PhD thesis, University of Manchester, 2008.
- [44] Toshio Miyauchi, Mamoru Tanahashi, and Motohiro Suzuki. Inflow and outflow boundary conditions for direct numerical simulations. *JSME international journal. Series B, fluids and thermal engineering*, 39(2) :305–314, 1996.
- [45] Knut Akselvoll and Parviz Moin. Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 315 :387–411, 1996.
- [46] John Craske and Maarten van Reeuwijk. Robust and accurate open boundary conditions for incompressible turbulent jets and plumes. *Computers & Fluids*, 86 :284–297, 2013.
- [47] Joel H Ferziger and Milovan Perić. *Computational methods for fluid dynamics*. New York : Springer-Verlag, 1996.
- [48] DJ Mavriplis. Multigrid techniques for unstructured meshes. Technical report, DTIC Document, 1995.
- [49] Rajat Mittal and Gianluca Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :239–261, 2005.

- 
- [50] Philippe Parnaudeau, Eric Lamballais, Dominique Heitz, and Jorge H Silvestrini. Combination of the immersed boundary method with compact schemes for DNS of flows in complex geometry. In *Direct and Large-Eddy Simulation V*, pages 581–590. Springer, 2004.
- [51] A Sohankar, C Norberg, and L Davidson. Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26(1) :39–56, 1998.
- [52] Dipankar Chatterjee and Bittagopal Mondal. Effect of thermal buoyancy on vortex shedding behind a square cylinder in cross flow at low Reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(25) :5262–5274, 2011.
- [53] EA Fadlun, R Verzicco, P Orlandi, and J Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 161(1) :35–60, 2000.
- [54] AtM Naguib and CE Wark. An investigation of wall-layer dynamics using a combined temporal filtering and correlation. *Journal of Fluid Mechanics*, 243 :541–560, 1992.
- [55] Peter Alan Davidson. *Turbulence : An Introduction for Scientists and Engineers : An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2004.
- [56] Th Von Kármán. Mechanische Ähnlichkeit und turbulenz. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1930 :58–76, 1930.
- [57] Clark B Millikan. A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. In *Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech*, volume 386, 1938.
- [58] Martin Wosnik, Luciano Castillo, and William K George. A theory for turbulent pipe and channel flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 421 :115–145, 2000.
- [59] GI Barenblatt. Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 248 :513–520, 1993.
- [60] J Nikuradze. VDI forschungsheft. 1932.
- [61] Stephen B Pope. *Turbulent flows*. Cambridge university press, 2000.

- [62] MV Zagarola and AJ Smits. Scaling of the mean velocity profile for turbulent pipe flow. *Physical review letters*, 78(2) :239, 1997.
- [63] MR Head and P Bandyopadhyay. New aspects of turbulent boundary-layer structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 107 :297–338, 1981.
- [64] Stephen K Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1) :601–639, 1991.
- [65] Philippe R Spalart. Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\theta = 1410$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 187 :61–98, 1988.
- [66] SJ Kline, WC Reynolds, FA Schraub, and PW Runstadler. The structure of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(04) :741–773, 1967.
- [67] Sedat Tardu. *Transport and Coherent Structures in Wall Turbulence*. John Wiley & Sons, 2014.
- [68] S Tardu. Characteristics of single and clusters of bursting events in the inner layer. Part 1. Vita events. *Experiments in fluids*, 20(2) :112–124, 1995.
- [69] S Tardu. Characteristics of single and multiple bursting events in the inner layer. Part 2. Level-crossing events. *Experiments in fluids*, 33(5) :640–652, 2002.
- [70] Garry L Brown and Andrew SW Thomas. Large structure in a turbulent boundary layer. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 20(10) :S243–S252, 1977.
- [71] MS Acarlar and CR Smith. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer. Part 1. Hairpin vortices generated by a hemisphere protuberance. *Journal of Fluid Mechanics*, 175 :1–41, 1987.
- [72] Jigen Zhou, RJ Adrian, S Balachandar, and TM Kendall. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 387 :353–396, 1999.
- [73] AE Perry and MS Chong. On the mechanism of wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 119 :173–217, 1982.
- [74] I Marusic, AKM Uddin, and AE Perry. Similarity law for the streamwise turbulence intensity in zero-pressure-gradient turbulent boundary layers. *Physics of Fluids (1994-present)*, 9(12) :3718–3726, 1997.
- [75] Ronald L Panton. Composite asymptotic expansions and scaling wall turbulence. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1852) :733–754, 2007.

- 
- [76] Ivan Marusic, Jason P Monty, Marcus Hultmark, and Alexander J Smits. On the logarithmic region in wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 716 :R3, 2013.
- [77] Ivan Marusic, BJ McKeon, PA Monkewitz, HM Nagib, AJ Smits, and KR Sreenivasan. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers : Recent advances and key issues. *Physics of Fluids (1994-present)*, 22(6) :065103, 2010.
- [78] Juan C Del Alamo, Javier Jiménez, Paulo Zandonade, and Robert D Moser. Scaling of the energy spectra of turbulent channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 500 :135–144, 2004.
- [79] Christopher D Tomkins and Ronald J Adrian. Spanwise structure and scale growth in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 490 :37–74, 2003.
- [80] Sergio Hoyas and Javier Jiménez. Reynolds number effects on the Reynolds-stress budgets in turbulent channels. *Physics of Fluids (1994-present)*, 20(10) :101511, 2008.
- [81] Petar Vukoslavcevic, James M Wallace, and Jean-Louis Balint. The velocity and vorticity vector fields of a turbulent boundary layer. Part 1. Simultaneous measurement by hot-wire anemometry. *Journal of Fluid Mechanics*, 228 :25–51, 1991.
- [82] Anant Honkan and Yiannis Andreopoulos. Vorticity, strain-rate and dissipation characteristics in the near-wall region of turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 350 :29–96, 1997.
- [83] Petar Vukoslavcevic and James M Wallace. A 12-sensor hot-wire probe to measure the velocity and vorticity vectors in turbulent flow. *Measurement Science and Technology*, 7(10) :1451, 1996.
- [84] Jean-Louis Balint, James M Wallace, and Petar Vukoslavcevic. The velocity and vorticity vector fields of a turbulent boundary layer. Part 2. Statistical properties. *Journal of Fluid Mechanics*, 228 :53–86, 1991.
- [85] S Rajagopalan and RA Antonia. RMS spanwise vorticity measurements in a turbulent boundary layer. *Experiments in fluids*, 14(1-2) :142–144, 1993.
- [86] Sedat Tardu. *Statistical approach to wall turbulence*. John Wiley & Sons, 2013.



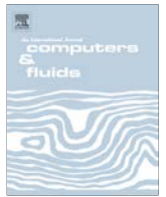
- [87] RA Antonia, J Kim, and LWB Browne. Some characteristics of small-scale turbulence in a turbulent duct flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 233 :369–388, 1991.
- [88] William K George and Hussein J Hussein. Locally axisymmetric turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 233 :1–23, 1991.
- [89] Hiroji Nakagawa and Iehisa Nezu. Structure of space-time correlations of bursting phenomena in an open-channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 104 :1–43, 1981.
- [90] CR Smith and SP Metzler. The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 129 :27–54, 1983.
- [91] RD Moser Jr. Direct numerical simulation of curved turbulent channel flow. 1984.
- [92] Nicholas Hutchins and Ivan Marusic. Large-scale influences in near-wall turbulence. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1852) :647–664, 2007.
- [93] Romain Mathis, Nicholas Hutchins, and Ivan Marusic. Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 628 :311–337, 2009.
- [94] I Marusic, R Mathis, and N Hutchins. Predictive model for wall-bounded turbulent flow. *Science*, 329(5988) :193–196, 2010.
- [95] KR Sreenivasan, A Prabhu, and R Narasimha. Zero-crossings in turbulent signals. *Journal of Fluid Mechanics*, 137 :251–272, 1983.
- [96] S Tardu. Detection and identification of near-wall coherent structures through conditional-sampling. In *IUTAM Symposium on Simulation and Identification of Organized Structures in Flows*, pages 355–364. Springer, 1999.
- [97] Stephen O Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*, 23(3) :282–332, 1944.
- [98] K. Purushothaman. Reynolds number effects and the momentum flux in turbulent boundary layers. 1993.
- [99] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. McGraw-Hill, 1984.
- [100] KR Sreenivasan, AJ Chambers, and RA Antonia. Accuracy of moments of velocity and scalar fluctuations in the atmospheric surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 14(3) :341–359, 1978.

- [101] KR Sreenivasan, A Prabhu, and R Narasimha. Zero-crossings in turbulent signals. *Journal of Fluid Mechanics*, 137 :251–272, 1983.
- [102] P Kailasnath and KR Sreenivasan. Zero crossings of velocity fluctuations in turbulent boundary layers. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)*, 5(11) :2879–2885, 1993.
- [103] Ulrich Zähle. A general Rice formula, Palm measures, and horizontal-window conditioning for random fields. *Stochastic processes and their applications*, 17(2) :265–283, 1984.



## Annexe A

Article paru dans la revue  
*Computers and Fluids*



# Efficiency of high accuracy DRP schemes in direct numerical simulations of incompressible turbulent flows



F. Bauer<sup>a</sup>, S. Tardu<sup>a,\*</sup>, O. Doche<sup>b</sup>

<sup>a</sup> LEGI, Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, Université Joseph Fourier, B.P. 53 X, 38041 Grenoble, Cédex 9, France

<sup>b</sup> LEPMI, Laboratoire d'Electrochimie et de Physico-chimie des Matériaux et des Interfaces, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1130 rue de la Piscine, 38402 Grenoble Cédex, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 18 April 2014

Received in revised form 23 July 2014

Accepted 18 October 2014

Available online 24 October 2014

### Keywords:

Turbulent channel flow

Direct numerical simulations

Dispersion relation preserving schemes

Compact schemes

## ABSTRACT

We investigate the ability of Dispersion Relation Preserving (DRP) schemes to provide accurate numerical solutions in incompressible turbulent flows. DRP and compact schemes have been implemented in a finite differences Direct Numerical Simulation (DNS) of a fully developed turbulent channel flow. The results are compared with standard second order difference schemes and pseudo-spectral strategies. Compact and DRP schemes both lead to satisfactory results even when the wall normal grid spacing exceeds the Kolmogorov scale in high buffer and logarithmic layers. This is explained by the appropriate spectral characteristics of these schemes that can subsequently be efficiently used in other non-homogeneous configurations.

© 2014 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

Wall bounded turbulent flows are attractive from both fundamental and industrial points of view. They are ubiquitous in our environment particularly in the atmospheric surface layer. Similarly, in most industrial applications, heat and mass transfer, together with mixing processes near a surface, are mainly caused and governed by turbulent flows. Drag reduction on aircrafts and ships or in pipelines is of great importance for economic and environmental issues. The ideal manipulation of turbulent flow in a heat exchanger would, for instance, consist in reducing the drag but increasing heat transfer and mixing. These objectives are still difficult to achieve, mainly for feasibility reasons, but also due to a lack of fundamental knowledge and quantitative characterization of wall turbulence, particularly in high Reynolds number flows. A few percent of the von Karman constant governing the velocity distribution in the so-called logarithmic layer in high speed flows has, for example, serious consequences in wall layer models used in aerodynamic design [1].

In order to get numerical representation of this broad range phenomenon, different approaches have been developed during recent decades. The first category is the Reynolds Averaged Navier–Stokes methods [2] where time-averaged Navier–Stokes equations are solved using statistical models (e.g.  $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$  and others). Large Eddy Simulations [3] go one step further and allow a temporal description of the large structures while their

interactions with the smallest ones are modeled via subgrids models. Paradoxically, the simplest approaches through Direct Numerical Simulations (DNS) are the best choice in terms of accuracy and completeness but the most difficult to handle as the computational cost may be prohibitive. DNS consist of solving the complete Navier–Stokes equations in time and space and resolving all the scales of motion. These approaches make no assumptions on the physics, and require no closure model to allow the resolution of the whole set of equations. It turns out that well resolved DNS can be considered as real numerical substitutes to laboratory experiments [4,5]. Emergence of massive parallelized strategies (i.e. Message Passing Interface or diverse derived hybrid programming involving Open MP formalism), as well as the ever increasing number of available computational cores, allowed Jimenez to reach a Karman number as high as 2000 in a turbulent channel flow [6].

Kim et al. [7] were first to present statistics from DNS of a turbulent channel flow with an explicit resolution of the near wall region. They resolved in time and space instantaneous vorticity-wall normal transport equations in the spectral space in homogeneous planes rather than in physical ones. This choice has been made by considering the high accuracy potential of spectral methods, which are known to converge with an exponential behavior [8]. Among spectral methods, pseudo-spectral strategy has been one of the most commonly used numerical methods in solving Navier–Stokes equations, especially with a mix of periodic boundary conditions in homogeneous planes and non-periodic boundary conditions in the non-homogeneous wall normal direction. These methods have the advantage of computing advection terms very

\* Corresponding author.

efficiently via FFT (Fast Fourier Transform) but tend to introduce an aliasing error [9], attributed to a spurious periodicity arising from the use of discrete Fourier coefficients. Other obstacles to the application of spectral methods concern their inability to deal with various flow geometries and their sensitivity to boundary conditions. In addition, spectral methods suffer from an inaccurate resolution of flow discontinuities, and consequently are not adapted to DNS of compressible flows containing shock waves. By the same token, the pseudo-spectral methods are unsuitable in some problems dealing with wall turbulence control. The effect of a localized perturbation on wall turbulence characteristics requires the combination of non-uniform mesh distributions in homogeneous planes with multi-grid resolutions [10], for instance.

An alternative to pseudo-spectral methods is to resolve the three components of the Navier–Stokes equations directly in the physical space [11]. This latter strategy is adopted in the present paper and various high-order finite difference schemes have been implemented into a proper turbulent channel DNS code. The code is designed to reach high Reynolds numbers but since this study required many different runs, the Karman number is fixed to 180. Obviously, the numerical schemes used for Navier–Stokes equations discretization have a significant impact on the quality of the numerical solution and on the computational cost of the DNS. Standard explicit finite difference schemes have very small computational costs but they have poor accuracy and require the use of sufficiently fine grids. Compact schemes combine high accuracy with reasonable numerical costs and then become increasingly popular in DNS [e.g. 12,13]. Tam & Webb designed highly accurate explicit schemes from spectral optimization approach and proved their ability to preserve the dispersion relation of convective equations. The so-called Dispersion Relation Preserving (DRP) schemes [14] have already been used for compressible flows simulations (see for example [15]). Our main aim in this work is to investigate the ability of DRP schemes to correctly resolve incompressible turbulent flows.

The paper is organized as follows. In the next section, we present the numerical schemes and discuss their accuracy, followed by the numerical method, the computational box and the mesh configuration. High order compact and dispersion relation preserving schemes are then applied to the resolution of the Navier Stokes equations in the physical space and for different mesh sizes. These results are then compared to previously published data obtained by vorticity-velocity formulation and a pseudo-spectral method.

## 2. Numerical schemes overview

First derivatives can be estimated from the function value at  $N$  nodes in the neighborhood of the node  $i$  and from the estimate at  $M$  adjacent nodes:

$$\frac{\delta f}{\delta x}_i + \sum_{m=1}^M \alpha_m \left( \frac{\delta f}{\delta x}_{i+m} + \frac{\delta f}{\delta x}_{i-m} \right) = \sum_{n=1}^N a_n \frac{(f_{i+n} - f_{i-n})}{h} \quad (1)$$

where  $a_n$  and  $\alpha_m$  are real coefficients. The second order finite difference scheme implies only one point at each side of node  $i$  ( $N = 1$ ) and corresponds to  $M = 0$  and  $a_1 = 1/2$ . The fourth order explicit scheme estimates the first derivative from the function values at nodes  $i \pm 1$  and  $i \pm 2$  ( $N = 2$  and  $M = 0$  while  $a_1 = 2/3$ ,  $a_2 = -1/12$ ).

The expression (1) can also be written in the matrix form as

$$\mathcal{A}f' = \mathcal{B}f \quad (2)$$

where  $\mathcal{A}$  is the  $(2M + 1)$  banded matrix associated to the first derivative approximation  $f'$  and  $\mathcal{B}$  is the  $(2N + 1)$  banded matrix associated with the function values  $f$ . One can group finite difference schemes in two categories depending on whether  $M = 0$  or not. For explicit schemes, the matrix  $\mathcal{A}$  is one-banded ( $M = 0$ ) and the

approximation can be straightforwardly obtained from the function values. Compact schemes ( $M > 0$ ) are implicit in space and then require a systematic matrix inversion procedure.

### 2.1. Explicit and compact schemes (CS)

The usual approach to derive the coefficients  $a_n$  and  $\alpha_m$  is to substitute the function and its derivative around the considered node through the Taylor expansion. For the sake of simplicity, we consider the case  $M = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}_i + \alpha \left( \sum_{l=1}^N \frac{h^{l-1}}{(l-1)!} f^{(l)} + \frac{(-h)^{l-1}}{(l-1)!} f^{(l)} \right) \\ = \sum_{n=1}^N a_n \left( \sum_{l=0}^N \frac{n(nh)^{l-1}}{l!} f^{(l)} - \frac{(-1)^l n(nh)^{l-1}}{l!} f^{(l)} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

One can note that the odd order terms are zero whatever the coefficients. The coefficients' values are then chosen so that the  $N + M$  first even orders of Eq. (3) match with the analytical first derivative  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}_i = f^{(1)} \right)$ .

With  $M = 1$ , we obtain the following set of constraints:

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha &= \sum_{n=1}^N 2na_n \quad (\text{order } 2) \\ 2 \frac{3!}{2!} \alpha &= \sum_{n=1}^N 2n^3 a_n \quad (\text{order } 4) \\ &\dots \\ 2 \frac{(p-1)!}{(p-2)!} \alpha &= \sum_{n=1}^N 2n^{p-1} a_n \quad (\text{order } p) \end{aligned} \quad (4)$$

The formal accuracy or the order of the scheme is given by the first unmatched constraint and is therefore  $2(N + M)$ . The formal accuracy of the compact schemes is consequently  $2M$  orders better than the explicit schemes based on the same stencil. We will see later that the gain in accuracy obtained with compact schemes is significant compared to the explicit schemes when both are derived according to the Taylor expansion approach.

### 2.2. EO schemes

Tam and Webb [14] proposed a different derivation approach in order to design explicit schemes that attain the same level of accuracy as standard compact schemes with a reduced numerical cost. They named them Dispersion Relation Preserving (DRP) schemes after their successful application to the linear wave equation. However, it must be emphasized that the term DRP should be explicitly related to the global discretization both in time and space [16]. Hence, in this paper, explicit spatial schemes derived according to the Tam & Webb's approach will be referred as Explicit Optimized (EO) schemes.

Tam & Webb's approach, based on spectral analysis of the error, consists of determining the schemes coefficients in relation (1) in order to minimize the error committed on the Fourier modes  $e^{(jkx)}$  (where  $j = \sqrt{-1}$ ). So, for a Fourier mode of wavenumber  $k$ ,  $f = e^{(jkx)}$ , the relation (1) can be reduced to [14]:

$$\frac{\delta f}{\delta x}_i = jk_{eq} f_i = \frac{k_{eq}}{k} \frac{df}{dx}_i$$

where  $k_{eq}$  is the modified wavenumber and  $df/dx$  is the exact first derivative. Concerning EO schemes,  $M = 0$  and the modified wavenumber is given by:

$$k_{eq} = -j \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{h} (e^{jknh} - e^{-jknh}) = \sum_{n=1}^N 2 \frac{a_n}{h} \sin(nkh)$$

The error  $\varepsilon$  induced by the discretization for the Fourier mode  $k$  is:

$$\varepsilon = \left( \frac{df}{dx} \Big|_i - \frac{\delta f}{\delta x} \Big|_i \right) = \left( 1 - \frac{k_{eq}}{k} \right) \frac{df}{dx} \Big|_i$$

The accuracy of a scheme can be related to its *spectral resolution*, that is, its ability to achieve high accuracy on a wide range of wavenumbers (e.g. [14,16,17]). EO schemes are designed to reach maximum spectral resolution with the considered stencil. Two different approaches can be followed to derive a EO scheme. Tam and Webb [14] use a “global minimization” approach in which scheme coefficients are evaluated in order to minimize the overall error  $E$  on a selected range of wavenumber, defined by  $k_{max}$ :

$$\begin{cases} E = \int_0^{k_{max}} \left| 1 - \frac{k_{eq}}{k} \right|^2 dk \\ \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0, \quad n = 1 \dots N \end{cases} \quad (5)$$

EO schemes proposed in this study have been derived from a “local minimization” approach [17] which consists of ensuring a perfect accuracy ( $\frac{k_{eq}}{k} = 1$ ) for a set of modes distributed in the range wherein a good accuracy is required. The scheme coefficients result from solving the following set of constraints:

$$\frac{k_{eq}(k_n h)}{k_n} = 1, \quad n = 1 \dots N \quad (6)$$

In practice, the usual Taylor and Fourier-space methodology can be combined to obtain a mixed set of constraints wherein some constraints are provided by the Taylor approach (Eq. (4)) and others by error minimization in Fourier space (Eqs. (5) or (6)). For example, Tam & Webb (1993) proposed a seven point EO scheme ( $N = 3$ ) wherein  $a_2, a_3$  coefficients are used to ensure a fourth order formal accuracy while  $a_1$  is used to minimize the error in Fourier space. The Fourier error minimization approach is not only intended to be applied to explicit schemes but can also be used to derive compact schemes. Kim et al. [18] proposed a tri-diagonal compact scheme whereby one coefficient is estimated using Fourier minimization while others are used to ensure sixth order accuracy.

### 3. Accuracy

The numerical solution can be seen as a sum of Fourier modes. Low wavenumber modes are well-defined in the grid and are accurately approximated by any numerical scheme. For the high frequency modes, the limited points available at each wavelength lead to a reduced accuracy.

In Fourier space, turbulent flows fields are represented by a large set of Fourier modes because of their multi-scale physics. Thus, numerical schemes used for DNS of such flows must be accurate in a large range of wavenumbers, even for the highest-frequency modes. We compare here the spectral resolution of EO and compact schemes for the first and second derivatives on collocated grids.

#### 3.1. First derivative schemes

The linear equation system (2) can be written in an explicit form whether the scheme is explicit or compact:

$$f' = [\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}] f = \mathcal{C} f \quad (7)$$

One can note that for explicit schemes the matrix  $\mathcal{A}$  is the identity matrix and the matrix  $\mathcal{C}$  is equivalent to the matrix  $\mathcal{B}$ . As mentioned before, the modified scaled wavenumber  $k_{eq}/k$  is a good criterion to measure the scheme accuracy for a mode  $k$ , and  $k_{eq}$  can be easily obtained by substituting the function  $f$  by the Fourier mode

$f = e^{jkx}$  in Eq. (7). The modified wavenumber at the node  $i$  of a  $N_g$  points grid is given by [16]:

$$k_{eq}(kh)|_i = -j \sum_{l=1}^{N_g} C_{il} e^{jkh(l-i)}$$

Fig. 1 shows the modified scaled wavenumbers of the sixth order Kim compact scheme (KCS) [18], the standard second order, the Tam & Webb's seven point EO (TWS) [14] and a 13-points EO ( $N = 6$ ) schemes. As mentioned before, the KCS has been obtained from a Taylor and Fourier minimization approach in which one coefficient was used to optimize the spectral resolution. The coefficients of these schemes are detailed in Table 1. The 13-points EO and KCS schemes have a very good spectral resolution and are accurate until  $kh \simeq 2.2$  whereas, the accuracy of the second order scheme is significantly deteriorated beyond  $kh = 0.5$ . Thus, EO and compact schemes under consideration are accurate with only 3 nodes per wavelength whereas, the second order scheme requires at least 12 points per wavelength. A zoom around the line  $k_{eq}/k = 1$  is proposed in the right-hand panel showing that both EO and KCS estimations oscillate around the exact solution. To the authors' experience, the intensity of these oscillations depends on the link between the requested spectral resolution and the stencil size. If the requested spectral resolution is too excessive, the oscillations become significant and dramatically affect the accuracy. The TWS and KCS show a satisfactory spectral resolution but have a more marked hump than the 13-points EO. So, the accuracy provided by the considered EO and compact schemes is ultimately equivalent and significantly better than TWS or second order schemes.

#### 3.2. Second derivative schemes

The second derivative appearing in diffusive terms of Navier-Stokes equations can be approximated by the following expression which is similar to Eq. (1) for the first derivative:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \Big|_i + \sum_{m=1}^M \alpha_m \left( \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \Big|_{i+m} + \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \Big|_{i-m} \right) = \sum_{n=1}^N a_n \frac{(f_{i+n} - 2f_i + f_{i-n}))}{h^2} \quad (8)$$

This equation can be written in matrix implicit (2) or explicit (7) forms where only the matrix  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{C}$  are modified. As for the first derivative schemes, a simple relation between the exact derivative value and its approximation can be obtained by substituting  $f$  by the Fourier mode expression in the explicit matrix form:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \Big|_i = -(k^2)_{eq} f_i = \frac{(k^2)_{eq}}{k^2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_i$$

The ratio  $\frac{(k^2)_{eq}}{k^2}$  is the *modified scaled wavenumber* for the second derivative and can be used to measure the scheme accuracy for the selected mode. The modified wavenumber can be expressed with the matrix  $\mathcal{C}$  coefficients as:

$$(k^2)_{eq}|_i = - \sum_{l=1}^{N_g} C_{il} e^{jkh(l-i)}$$

Fig. 2 shows the modified scaled wavenumber profile for a 13-points EO, the sixth order compact and the second order schemes. The related numerical coefficients are detailed in Table 2. It must be noted that the compact scheme considered here has been purely derived from a Taylor expansion approach. The EO scheme provides an excellent accuracy comparable to the one obtained with CS. As observed for the first derivative, the second order estimation has a poor spectral resolution and can be conveniently used only if the grid is fine enough to ensure small  $kh$  for all modes.

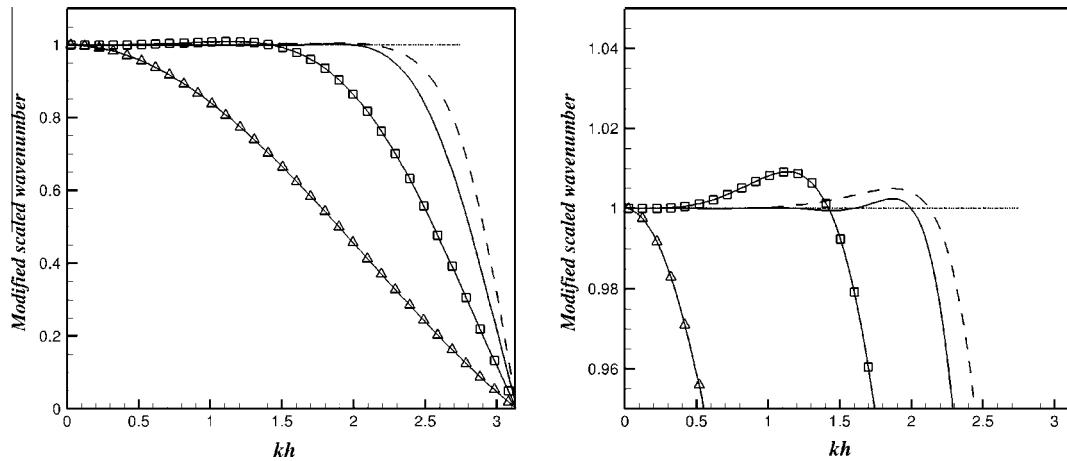


Fig. 1. Modified scaled wavenumber for first derivative schemes. O2 ( $\triangle$ ), TWS ( $\square$ ), KCS [18] (dashed line) and EO-13 (solid line).

Table 1

Eq. (1) coefficients for the considered first derivative schemes.

Coefficient	O2	TWS [14]	KCS[18]	EO-13
$a_1$	1/2	0.79926643	0.784049106	0.9156761296334
$a_2$	0	-0.18941314	0.06791427675	-0.3487613324475
$a_3$	0	0.02651995	-0.003762796833	0.1434845898017
$a_4$	0	0	0	-0.0508502076014
$a_5$	0	0	0	0.0130513740662
$a_6$	0	0	0	-0.0017438790115
$\alpha_1$	0	0	0.408589269	0

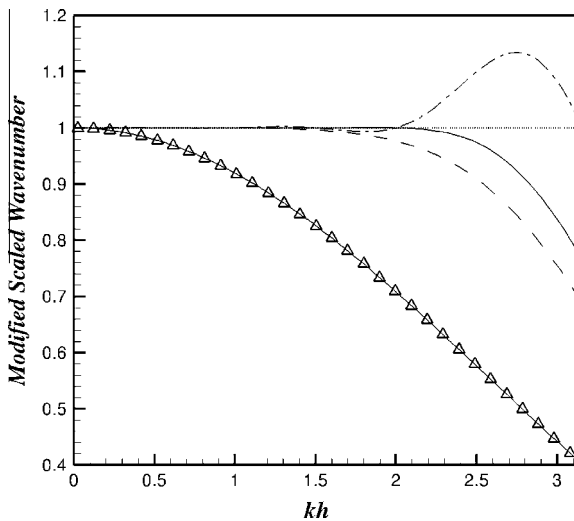


Fig. 2. Modified scaled wavenumber for second derivative schemes. O2 ( $\triangle$ ), 6th order compact (dashed line), EO-13 (solid line) and EO-13 with over dissipation for high frequency modes (dash/dot line).

Table 2

Eq. (8) coefficients for the considered second derivative schemes.

Coefficient	O2	6th order compact	EO-13	EO-13-AA
$a_1$	1	12/11	1.8129068317377	2.178831413991164
$a_2$	0	3/44	-0.3347327651098	-0.62233954789826
$a_3$	0	0	0.0870462532703	0.27324369530023
$a_4$	0	0	-0.0214063366504	-0.11423388546519
$a_5$	0	0	0.0039703382061	0.035021195634051
$a_6$	0	0	$-3.930310966 \times 10^{-4}$	-0.00545748504390
$\alpha_1$	0	2/11	0	0

Over-dissipative schemes at highest wavenumbers can be specifically designed in order to control aliasing errors via the viscous terms [19]. A fourth order anti-aliasing EO scheme (EO-13-AA) has been designed for this purpose by setting  $k^2|_{eq}/k^2 = 1$  for  $kh = \{0.05, 0.5, 1, 1.5, 2\}$  and  $k^2|_{eq}/k^2 = 1.1$  for  $kh = 2.5$ . The spectral resolution of this scheme is shown by the dash-long lines in Fig. 2. One can note that the second derivative is over-estimated ( $k^2|_{eq}/k^2 > 1$ ) in the area where spurious oscillations expectedly occur [20].

## 4. Overview of DNS code

### 4.1. Numerical framework

The flow is described by the Navier–Stokes equations in incompressible case which can be expressed in non-dimensional form as:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (U_i \vec{U}) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \Delta U_i \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (10)$$

together with the continuity equation where  $U_i$  is the  $i$ -th velocity component,  $P$  is the pressure and  $Re = \frac{U_c h}{\nu}$ .

#### 4.1.1. Time integration

DNS codes based on standard second order schemes use generally a semi-implicit approach for time advancement of viscous and convective terms (see for example [21] or [22]) in which the convective non-linear terms are estimated with an explicit time integration scheme (as Adams–Bashforth or Runge Kutta) whereas the implicit Crank–Nicolson method is used for diffusive terms due to its unconditional stability. The numerical solution at the next iteration is obtained by solving the resulting linear system which is implicit in time. In cases where standard second order or a fourth order standard compact schemes are used for discretization of viscous terms, this system involves a tridiagonal matrix configuration that can be efficiently solved using a Thomas algorithm. In our particular case, the use of EO schemes for the diffusive terms makes the matrix structures less convenient. In addition, this linear system requires a particular algorithm for any stencil size of the scheme used for discretization of viscous terms and cannot be solved in a generic way. So, an explicit-in-time advancement approach is preferred for both the diffusive and convective terms.

The time integration of Eq. (9) is performed according to a fractional step approach in which convective and diffusive ( $F$ ) terms are integrated by a three stage and third order low storage Runge Kutta scheme (LSRK3) [23]:



$$U_i^* = U_i^k + \Delta t (\alpha_k F_i^{(k)} + \beta_k F_i^{(k-1)}) + \gamma_k a \Delta t \frac{\delta_p^{(1)} P^k}{\delta x_i} \quad (11a)$$

$$\frac{\delta_p^{(1)} P^{k+1}}{\delta x_i} = -\frac{1}{\gamma_k b \Delta t} \frac{\delta_p^{(1)} U_i^*}{\delta x_i} \quad (11b)$$

$$U_i^{k+1} = U_i^* + \gamma_k b \Delta t \frac{\delta_p^{(1)} P^{k+1}}{\delta x_i} \quad (11c)$$

In these equations,  $\delta_p^{(1)}$  is the first derivative staggered discretized operators used for the pressure gradient and velocity divergence calculation. The LSRK3 scheme used is defined by  $U(t) = U^{(1)}$ ,  $U(t + \Delta t) = U^{(4)}$ ,  $\alpha_{1,2,3} = [\frac{8}{15}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}]$ ,  $\beta_{1,2,3} = [0, -\frac{17}{60}, -\frac{5}{12}]$  and  $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$ . For the pressure integration, the first order approximation ( $a = 0$  and  $b = 1$ ) is used instead of the second order one ( $a = b = \frac{1}{2}$ ) because of its better stability [11]. The time integration is split into two steps. Intermediate velocity fields are firstly obtained from convective, diffusive terms and pressure at the current substep  $k$ . The pressure at the next substep is then solved to ensure the continuity equation and used to update the velocity at the next substep. The resulting velocity field fulfill the free-divergence condition (in the  $\delta_p^{(1)}$  operator sense) up to the machine accuracy.

#### 4.1.2. Spatial discretization

Three different configurations have been developed: the simple one using only second order finite difference schemes (O2), the compact (CS) and the configuration using EO schemes (EO). The CS configuration involves the Kim's optimized compact scheme for the first derivative at the collocated nodes [18] and is combined with the standard compact schemes (6th order) for the rest of the estimations. The EO configuration uses high accuracy and fourth order EO schemes in the spanwise and streamwise directions and in the wall normal direction for interior nodes (as opposed to the near-wall nodes that require the use of smaller stencil schemes). The near-wall nodes are resolved by smaller stencil and comparatively less accurate explicit schemes.

Hereafter, the schemes will be denoted according to the following pattern:

*D[derivative order][nodes arrangement: s/c for staggered/collocated].*

For example, the first derivative scheme on staggered grid used in the pressure gradient determination is denoted by D1s and the second derivative scheme on collocated grid used for diffusive terms by D2c.

#### 4.2. Mesh configuration

The computational domain is a  $L_x \times L_y \times L_z$  parallelepiped box discretized by a structured mesh of  $N_x \times N_y \times N_z$  mesh nodes.

Fig. 3 shows an overview of the computational box and some key informations on the flow configuration. The mean flow is in the  $x$  direction from left to right. The boundary conditions are the no-slip at the wall while periodic boundary conditions are applied for the streamwise and spanwise directions. Note that the choice of periodic conditions requires that the computational box is long enough in the  $x$  and  $z$  directions to avoid any correlations between the inlet and outlet.

It must be noted that the high accuracy schemes presented in this work cannot be applied along the  $y$  direction for the near-wall nodes because the stencil is too large. So, our 13-points EO schemes, using six nodes on each side of the considered point, can only be used beyond six points away from the wall. The scheme has to be replaced by smaller stencil schemes near the boundaries.

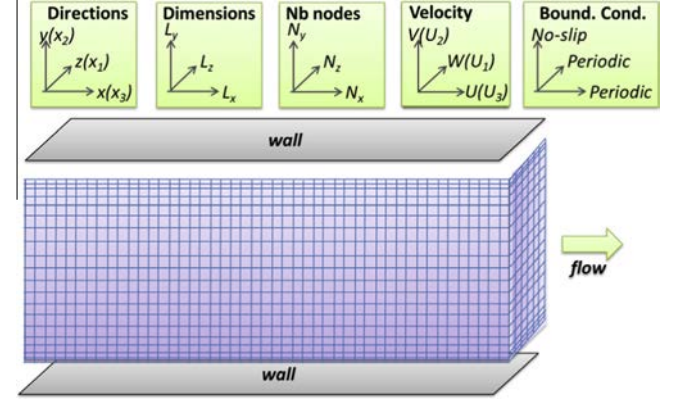


Fig. 3. Overview of computational domain and flow configuration.

The mesh nodes are distributed uniformly along the  $x$  and  $z$  directions and refined near the wall in the  $y$  direction through a tanh distribution [24]. The  $y$  coordinate for the  $j$ -th node is deduced from a uniform nodes distribution  $s(j) = \frac{(j-1)}{n_y}$ :

$$y(j) = \frac{\tanh(a(s(j) - \frac{1}{2}))}{\tanh(\frac{a}{2})} \quad (12)$$

The parameter  $a$  is used to control the intensity of the refinement near boundaries. The value chosen here is  $a = 3.8$ .

The derivatives along the  $y$  direction are easily obtained according to the Jacobian approach i.e., by applying the schemes on the uniform grid and using the chain rule in order to obtain the derivatives on the non-uniform grid. The first and second derivatives used for convective and diffusive terms are given by:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{ds}{dy} \frac{\delta f}{\delta s} \quad (13a)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{d^2 s}{dy^2} \frac{\delta f}{\delta s} + \left( \frac{ds}{dy} \right)^2 \frac{\delta^2 f}{\delta s^2} \quad (13b)$$

It must be noted that the coefficients related to mesh geometry  $\frac{ds}{dy}$  and  $\frac{d^2 s}{dy^2}$  are performed analytically from relation (12).

A traditional staggered grid arrangement is used in this work where the pressure is located at the center of the cells while the velocities are placed on each corresponding face. The strong coupling between the pressure and velocity field implied by the staggering prevents the grid-scale pressure oscillations occurring in collocated grids [25]. The ability of a staggered grid to conserve the kinetic energy is a well known characteristic [26].

Fig. 4 shows the variables location on uniform and non-uniform grids. As mentioned before, although the computational domain is irregular in the  $y$  direction, variables are mapped on an equivalent uniform domain (Fig. 4, right). In the uniform grid, velocity components are located at the center of their respective face while the pressure variable is cell-centered. It must be noted that each velocity component depends upon others velocity components that are located at other faces of the cell and must be consequently interpolated. Finally, six interpolations and 21 derivative approximations must be performed to compute all the terms implied in the Navier–Stokes equations.

#### 4.3. Velocity products

The following sections present an overview of the numerical schemes used for the Navier–Stokes equation on the streamwise velocity  $U$ . Fig. 5 shows the sites in the cell where the quantities implied in the Navier–Stokes equations are determined. The velocity component in the  $x$  direction is, for example, performed

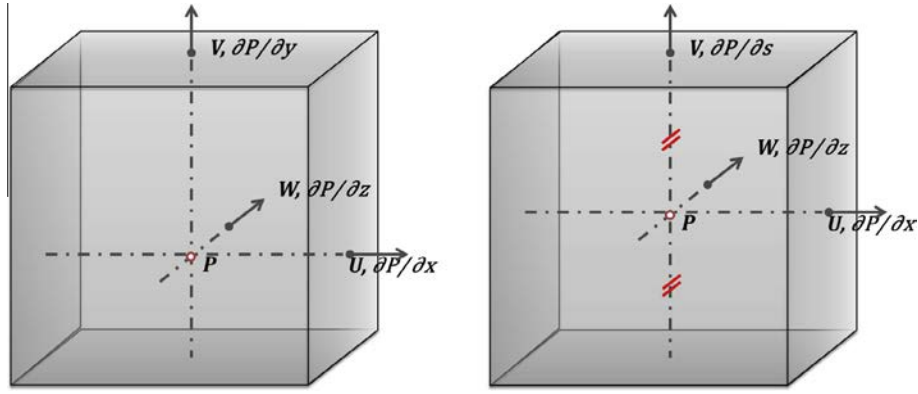


Fig. 4. Variables location in the non-uniform (left) and uniform (right) grids cells.

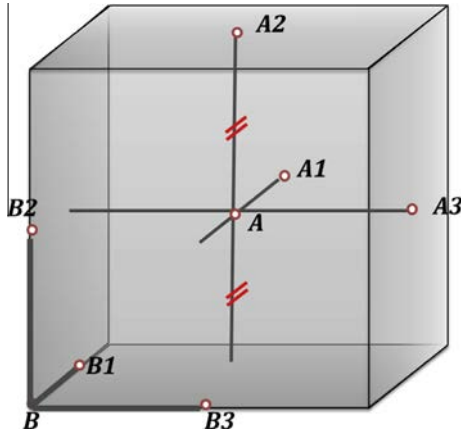


Fig. 5. View of sites in the cell where Navier–Stokes equations terms are computed.

at the site A3 while the  $y$  component of the pressure gradient is computed at the site A2 from the pressure of A. A quantity  $Q$  performed on the site  $S$  will be denoted by  $Q^{(S)}$  hereafter.

The first step is to estimate the velocity products  $UU$ ,  $UV$  and  $UW$  at their respective sites ( $A$ ,  $B1$ ,  $B2$ ). This is done by using  $U$ ,  $V$  and  $W$  at the sites ( $A3$ ,  $A2$  and  $A1$ ) and interpolating  $U$  along the  $x$ ,  $y$  and  $z$  directions and both  $V$  and  $W$  along the  $x$  direction. Hereafter,  $j$  denotes the index of the cells along the  $y$  coordinate and  $n$  denotes the nodes around the estimation site.

$U^{(B1)}$  is determined according to the D0s scheme:

$$\alpha_{-1}U_{j-1}^{(B1)} + U_j^{(B1)} + \alpha_1U_{j+1}^{(B1)} = \sum_{n=-A}^B a_n(U)_n^{(A3)} \quad (14)$$

For both EO and CS configurations, Appendix A gives the coefficients appearing in this equation for the first ( $j = 2, \dots, 5$ ) and for inner cells. For the cells  $j = (4, 5)$ , the 7-points EO coefficients  $a_2, a_3$  have been obtained from a Taylor approach while the coefficient  $a_1$  is determined from a global error minimization in the Fourier space (Eq. (5) with  $k_{max} = 0.4\pi$ ). For the inner cells, two Taylor constraints are matched to obtain a fourth order formal accuracy and three additional constraints are provided by the local minimization approach (Eq. (6)) at  $kh = 0.9, 1.35$  and  $1.8$ . The details on the derivation of the proposed EO schemes are given in Appendix A. Fig. 6 shows the transfer function of D0s for the EO and CS. It is recalled that the transfer function is defined by  $Tr(kh) = \frac{\hat{f}}{f}$ , where  $f = e^{ikx}$  and  $\hat{f}$  is the scheme interpolation.

#### 4.4. Convective terms

The convective terms  $C_x = \delta UU/\delta x$  and  $C_z = \delta UW/\delta z$  result from the first derivative schemes on staggered grid (D1s). The related term in the  $y$  direction  $C_y = \delta UV/\delta y$  is obtained from  $C_s = \delta UV/\delta s$  and the chain rule (Eq. (13a)) together with the D1s scheme:

$$\alpha_{-1}C_s|_{j-1}^{(A3)} + C_s|_j^{(A3)} + \alpha_1C_s|_{j+1}^{(A3)} = \frac{1}{h} \sum_{n=-A}^B a_n(UV)_n^{(B1)} \quad (15)$$

The coefficients appearing in Eq. (15) are given in Appendix B for EO and CS configurations respectively. The corresponding spectral resolutions are shown in Fig. 7.

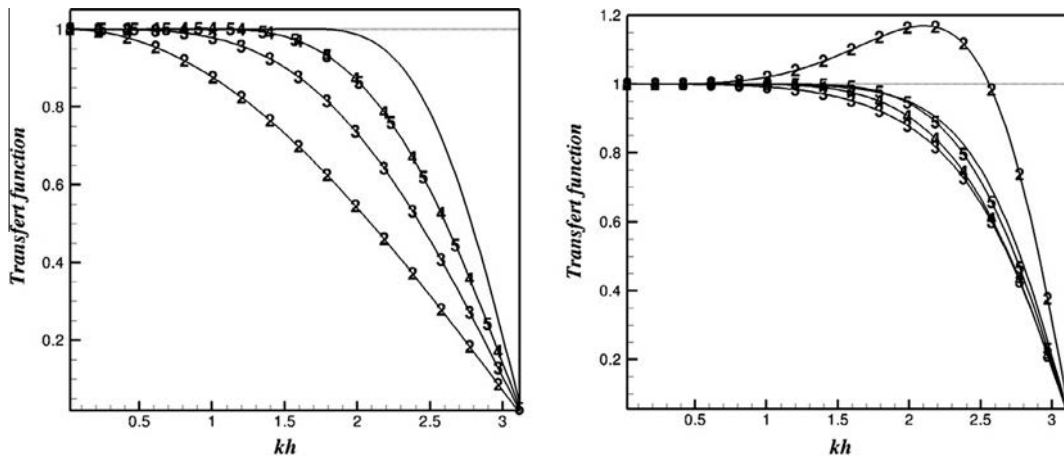
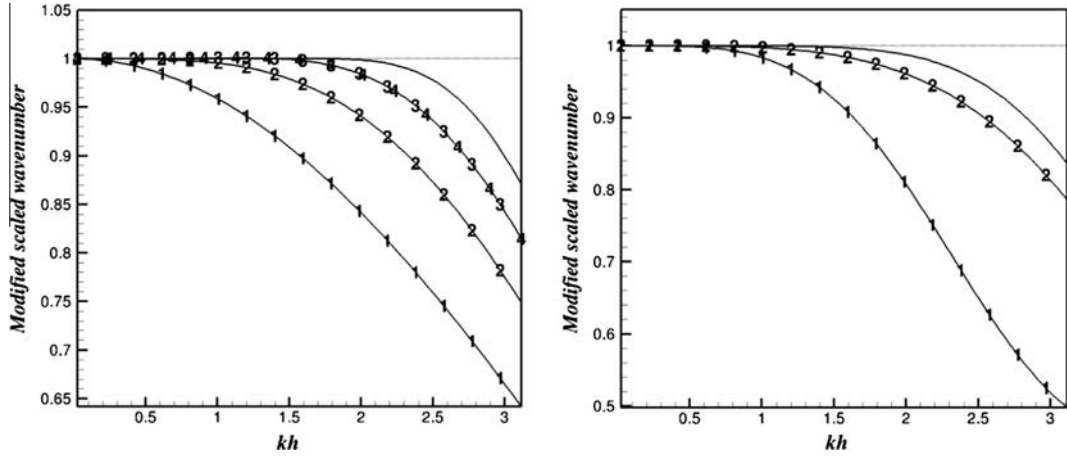


Fig. 6. Transfer function of the EO (left) and compact (right) schemes used for staggered interpolation (D0s) for various cell number  $j$  in the  $y$  direction.

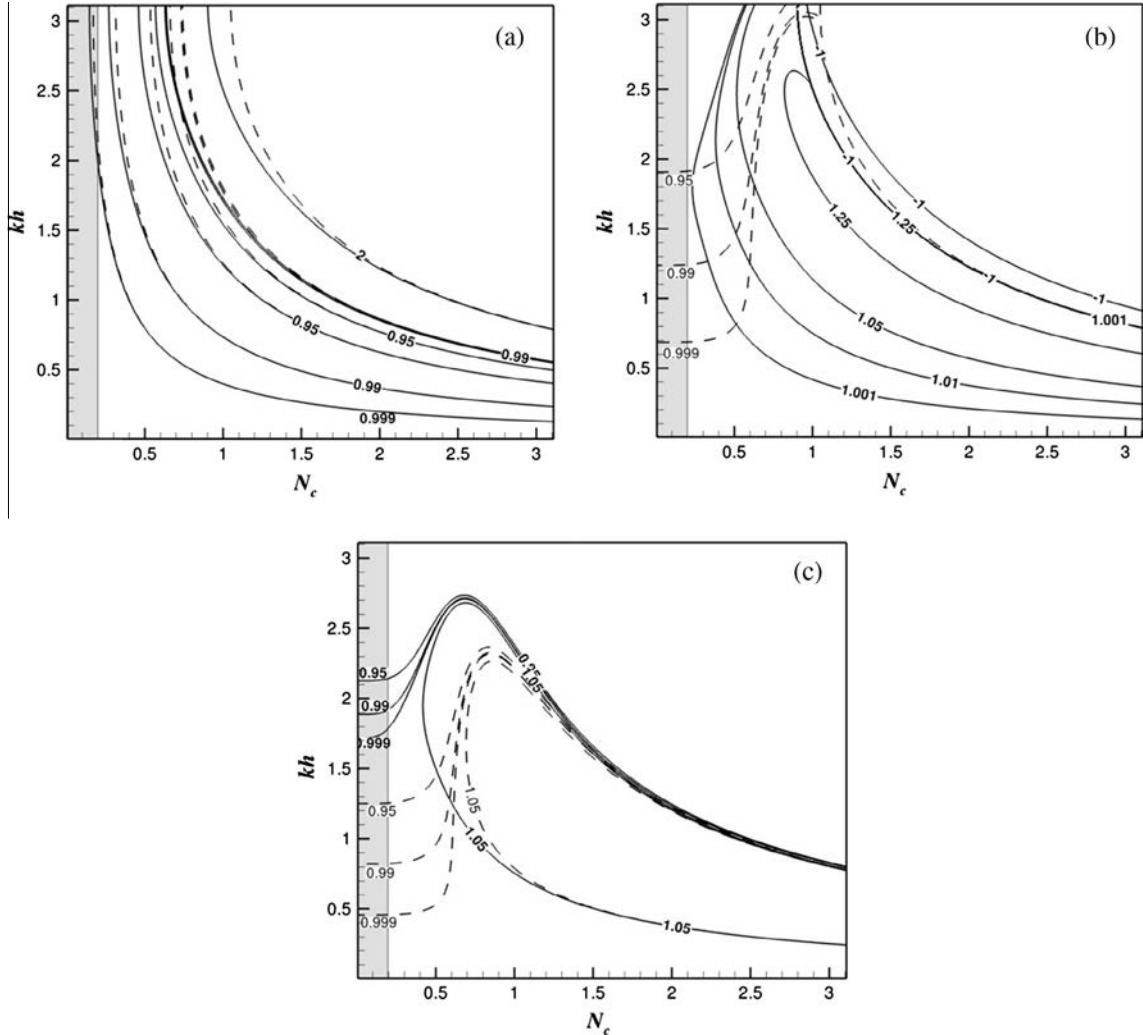


**Fig. 7.** Modified scaled wavenumber of the EO (left) and compact (right) schemes used for staggered first derivative (D1s) for various cell number  $j$  in the  $y$  direction.

The quality of the numerical solution (i.e. stability and Dispersion Relation Preserving of the spatio-temporal numerical scheme) is closely related to the discretization of the convective terms [16]. The staggered EO schemes used for convective terms and LSRK3 time integration are applied to the linear wave equation that is supposed to reproduce the physics of convective terms as in [16]:

$$\frac{\delta U}{\delta t} + c \frac{\delta U}{\delta x} = 0 \quad (16)$$

The stability of the numerical solution for the mode  $U(t) = U_k(t)e^{ikx_i}$  at the point  $i$  can be evaluated by considering the amplification factor of the discretized wave equation  $G = \frac{U(t+\Delta t)}{U(t)} = |G|e^{ikc_N\Delta t}$  where  $c_N$  is the phase speed of the numerical



**Fig. 8.** Stability and DRP properties of staggered EO (solid line) and standard staggered fourth order (dash line) schemes in combination with the LSRK3 time integration scheme. (a) Amplification factor  $|G|$ , (b) scaled phase velocity  $c_N/c$  and (c) scaled group velocity  $V_g/c$ .

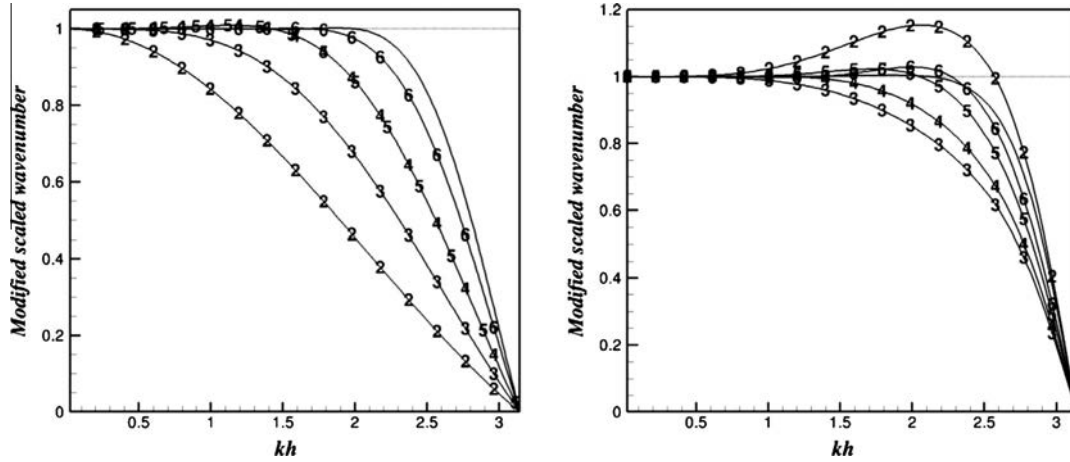


Fig. 9. Modified scaled wavenumber of the EO (left) and compact (right) schemes used for collocated first derivative (D1c) for various cell number  $j$  in the  $y$  direction.

solution. The wave equation is purely convective and exact solution is characterized by  $|G| = 1$ . The case  $|G| < 1$  and  $|G| > 1$  lead respectively to a damping and a growth of the numerical solution.

The amplification factor is obtained by the Eq. (5) given in [27] with  $q = -jk_{eq}c$ . For the LSRK3 used here  $a_{21} = \alpha^{(1)}$ ,  $a_{31} = \alpha^{(1)} + \beta^{(2)}$ ,  $a_{32} = \alpha^{(2)}$  and  $b = [\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}]$ .

The scaled phase velocity and scaled group velocity are derived from the expression of  $G$  as in [28]:

$$\frac{c_N}{c} \Big|_i = \frac{\beta_i}{kc\Delta t} = \frac{\beta_i}{khN_c}$$

$$\frac{V_g}{c} \Big|_i = \frac{d\omega_N}{dk} = \frac{1}{N_c} \frac{d\beta_i}{d(kh)}$$

where  $\beta = \arg(G)$ ,  $N_c$  is the CFL number and  $\omega_N$  is given by the numerical dispersion relation  $\omega_N = kcN_c$ . The velocity group of the exact solution is strictly equal to the phase velocity  $c$ .

Fig. 8 shows the amplification factor  $|G|$ , the scaled phase velocity and the group velocity for the staggered EO scheme used for the spatial discretization of convective terms in the  $(kh, N_c)$  plane. The results are compared with the standard fourth order explicit scheme on staggered grid. The shaded area corresponds to  $N_c = 0.2$ , the CFL chosen for the all DNS performed in this study. It can be seen that the (EO-LSRK3) combination is near-neutral ( $|G| \simeq 1$ ) for the considered CFL number. The phase velocity and group velocity are closed to the ideal one and the dispersion relation is consequently very well preserved. Thus, the DRP properties are presumably well conserved for the convective terms in DNS results presented below. Yet, the Navier Stokes equations are substantially more complex than Eq. (16), essentially because of the nonlinear terms. We base our arguments here on [16] who argue that the linear wave equation is an acceptable model to mimic the physics of the latter.

#### 4.5. Diffusive terms

The diffusive terms are performed by second derivative schemes on collocated grid (D2c). For the first cell  $j = 1$  (and the last cell  $j = N_y - 1$ ), the diffusive term  $D_y = \delta^2 U / \delta y^2$  is estimated by a second order integrated scheme including the local mesh geometry in its coefficients:

$$D_y|_{j=1}^{(A3)} = \left(\frac{1}{h_1}\right)^2 \left( \frac{2}{\frac{h_2}{h_1} + 1} (U)_{j=1}^{(B1)} - \frac{2h_1}{h_2} (U)_{j=1}^{(A3)} + \frac{2}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1}} (U)_{j=2}^{(A3)} \right)$$

where  $h_1 = y_{j=1}^{A3} - y_{j=1}^{B1}$  and  $h_2 = y_{j=2}^{A3} - y_{j=1}^{A3}$ . This scheme is used for all configurations (O2, EO and compact). The case  $h_1 = h_2$  results in the standard second order derivative scheme on the uniform grid.

For the other cells,  $D_y$  is obtained from the chain rule Eq. (13b). The first and the second derivatives on the uniform grid ( $D_{s,1} = \delta U / \delta s$  and  $D_{s,2} = \delta^2 U / \delta s^2$ ) are given by the D1c and D2c schemes according to:

$$\alpha_{-1} D_{s,d}|_{j-1}^{(A3)} + D_{s,d}|_j^{(A3)} + \alpha_1 D_{s,d}|_{j+1}^{(A3)} = \frac{1}{h^d} \sum_{n=-A}^B a_n U_n^{(A3)} \quad (17)$$

Appendix C and D give the Eq. (17) coefficients for EO and CS configurations. The corresponding spectral resolutions are shown in Figs. 9 and 10.

#### 4.6. Pressure equation

The Poisson equation (Eq. (11b)) is crucial to ensure continuity and deserves particular attention. It is solved in the spectral space for  $x$  and  $z$  periodic directions and in the physical space in the  $y$  wall normal direction where the Dirichlet boundary condition makes a spectral resolution more difficult. Let the pressure field at the next iteration be denoted by  $P$ . The Fourier decomposition of  $P$  is:

$$P = \sum_{i_x=0}^{N_x-1} \sum_{i_z=0}^{N_z-1} \hat{P}(k_x, y, k_z) e^{jk_x x} e^{jk_z z}$$

where  $k_x = \frac{2\pi i_x}{L_x}$  and  $k_z = \frac{2\pi i_z}{L_z}$ . This expression is included in the Eq. (11b). The pressure field at the next iteration is deduced from:

$$\sum_{i_x=0}^{N_x-1} \sum_{i_z=0}^{N_z-1} (-k_{x,eq}^2 + \mathbf{M} - k_{z,eq}^2) \hat{P}(k_x, y, k_z) e^{jk_x x} e^{jk_z z} = \sum_{i_x=0}^{N_x-1} \sum_{i_z=0}^{N_z-1} \hat{D}(k_x, y, k_z) e^{jk_x x} e^{jk_z z} \quad (18)$$

where  $\hat{D}(k_x, y, k_z)$  is the Fourier transform of the right hand side of Eq. (11b) and  $\mathbf{M}$  is the matrix related to the second derivative operator  $\Delta^{(yy)} = \frac{\delta_p^{(1)}}{\delta y} \frac{\delta_p^{(1)}}{\delta y}$  in the  $y$  direction. The latter results from two successive applications of the staggered first derivative operator  $\delta_p^{(1)}$ . The  $P^{(y)} = \frac{\delta_p^{(1)}}{\delta y} P$  approximation is obtained from  $P^{(s)} = \frac{\delta_p^{(1)}}{\delta s} P$  and the chain rule together with the D1s scheme:

$$P^{(s)}|_j^{(A2)} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^N a_n (P_n^{(A)} - P_{-n}^{(A)})$$

Standard second and fourth order schemes are used at respectively the nearest point to the wall  $j = 1$  ( $N = 1$  and  $a_1 = 1$ ) and at  $j = 2$  ( $N = 2$ ,  $a_1 = 9/8$  and  $a_2 = -1/24$ ).

In order to deal with a matrix  $\mathbf{M}$  as sparse as possible while maintaining a reasonable degree of accuracy, a 7-points EO scheme



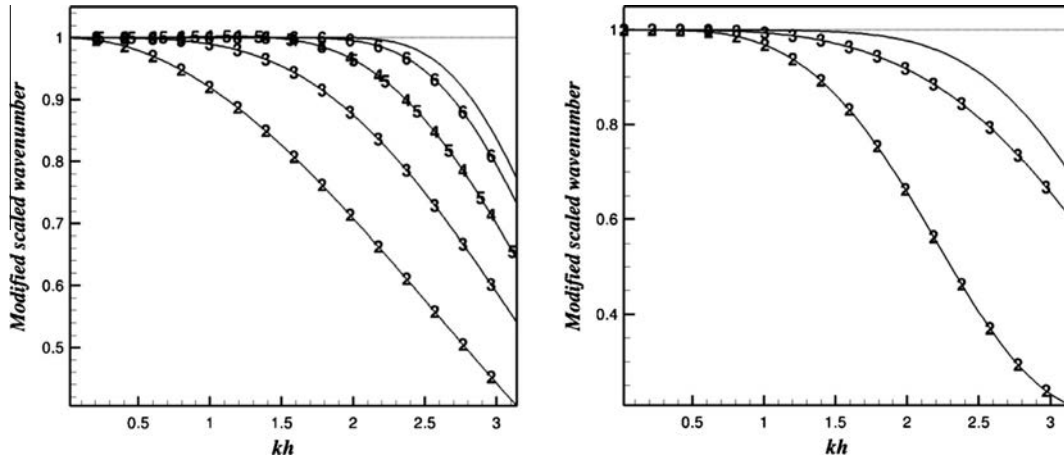


Fig. 10. Modified scaled wavenumber of the EO (left) and compact (right) schemes used for collocated second derivative (D2c) for various cell number  $j$  in the  $y$  direction.

is applied for interior nodes ( $j > 2$ ) in which  $N = 3$ ,  $a_1 = 1.18910195$ ,  $a_2 = -0.07371764$  and  $a_3 = 0.006410195$ . The resulting matrix  $\mathbf{M}$  is 11-banded and the system can be solved by the LAPACK band solver. It must be noted that the size of matrix  $\mathbf{M}$  can be reduced by using a second derivative compact scheme ( $\Delta = \delta_p^{(2)}$ ). In this case,  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  and the resulting system can efficiently be solved by multiplying each side of Eq. (18) by  $\mathbf{A}$ .

Fig. 11 shows the modified scaled wavenumber of the resulting second derivative scheme  $\delta_p^{(1)}\delta_p^{(1)}$  for the near-wall and interior nodes (solid line). The modified wavenumber for the standard sixth order scheme (dash line) is also given for comparison. The accuracy obtained for the interior nodes is very close to the one of the compact scheme.

## 5. Results

### 5.1. Computational time

The efficiency of the EO and compact schemes, in the context of the present DNS code, has been investigated. As discussed before in Section 4.4 and in order to ensure good DRP properties, CFL has been fixed to 0.2. Table 3 shows the CPU time (measured with Scalasca) required to apply the EO and compact version of D1s operator on the whole computational domain. The mesh resolution is  $512 \times 512 \times 512$ . Simulations have been performed on 1024 cores on the Turing machine of IDRIS (the French Institute for Development and Resources in Intensive Scientific Computer). The compact scheme implementation here is similar to the one of the Incompact3D code [29] which is also compared to the present case in Table 3. The ensemble of the DNS codes have been compiled with mpi\_xlf90 and the O3 compiler option. To the author's experience, the EO scheme seems to be more efficient than the compact scheme tested here as seen in Table 3. It is, however, necessary to note that such results are strongly dependent on the scheme implementation and the operating environment and it is difficult to draw any general conclusion about relative efficiencies.

### 5.2. Elimination of aliasing errors

The non-linear convective terms can produce high  $kh$  modes that cannot be solved when a coarse grid is used. These modes are aliased to lower wavenumber modes and produce grid-scale oscillations that can significantly deteriorate the quality or/and stability of numerical solution [30]. Because of their poor spectral resolution, standard second order schemes act as implicit filter that significantly reduces the range of highest wavenumbers and are

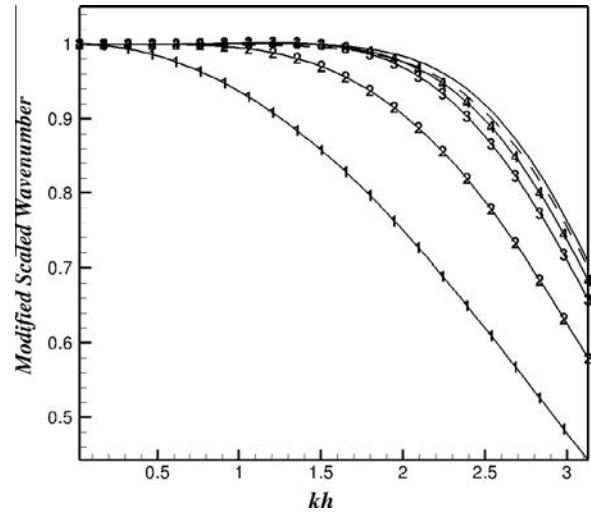


Fig. 11. Modified scaled wavenumber for the discretization of pressure ( $\delta_p^{(1)}\delta_p^{(1)}$ ) compared to the standard sixth order compact scheme (dash line). The curves are numbered by the corresponding index position from the wall.

consequently not concerned by the aliasing. In case of high accuracy schemes (as compact or EO schemes), the highest wavenumber modes affected by aliasing are relatively well preserved and must be artificially damped. The most evident approach is to use filter acting only for high frequency modes (e.g. [17]). Another approach is to use a particular scheme for the viscous [19] or convective terms [31,16] designed to introduce artificial damping in the discretized equations.

Here, we consider both the use of the over-dissipative EO scheme given in Section 3.2 for the diffusive terms and the use of an explicit filter. A fourth order and high spectral resolution explicit optimized filter (EOF) has been designed:

$$\hat{U}_j = a_0 U_j + \sum_{n=1}^6 a_n (U_n + U_{-n}) \quad (19)$$

Two Taylor constraints are matched to reach a fourth order accuracy while the transfer function  $Tr$  of the filter is set to be 1 for

Table 3

Computational cost of the application of EO and two compact D1s schemes on a  $512 \times 512 \times 512$  computational domain.

	EO	Compact	Compact[29]
CPU time	71.03	179.13	180.59

$kh = \{0.7, 1, 1.3 \text{ and } 1.6\}$  and 0 for  $kh = \pi$  corresponding to the last resolved modes. The resulting coefficients are  $a_0 = 0.80900921681$ ,  $a_1 = 0.17171224382$ ,  $a_2 = -0.12389250657$ ,  $a_3 = 0.070011649342$ ,  $a_4 = -0.029444296669$ ,  $a_5 = 0.0082761068399$  and  $a_6 = -0.001167805164$ . Fig. 12a shows that this filter preserves the large and intermediate scales which are not impacted by the aliasing. The EOF is applied before Eq. (11a) at the first step ( $k = 1$ ) of LSRK3 scheme at various frequency in order to obtain a good compromise between aliasing elimination and preservation of free-aliasing modes.

Filter and over-dissipative approach have been applied to the DNS. Three different grids have been considered: a very fine (VFRG:  $N_x = 1024$ ,  $N_y = N_z = 256$ ), a medium (MRG:  $N_x = N_y = N_z = 128$ ) and a coarse (CRG:  $N_x = 128$ ,  $N_y = N_z = 64$ ) resolution grid. The size in the streamwise and spanwise directions of the grids considered here is  $L_x = 4\pi h$  and  $L_z = 4\pi h/3$ . All DNS have been realized with the EO configuration (except for over-dissipative one where second derivative scheme used for inner cells is replaced by the EO-13-AA scheme). A DNS has been performed on the VFRG, MRG and CRG grids without any aliasing control. In the very fine configuration the streamwise and spanwise mesh sizes are about twice the Kolmogorov scale. On the CRG, three DNS have been performed by using the EOF at respectively every 5, 50 and 100 iterations (CRG-F5, CRG-F50 and CRG-F100) for the inner nodes of the computational domain ( $j > 6$ ). The velocity fields at the near wall points are not filtered. Finally, a DNS has been performed by using the

over-dissipative scheme EO-13-AA (CRG-OVER) without any filtering.

Fig. 12 shows the premultiplied spectra (obtained at  $y^+ = 30$ ) of the streamwise velocity in the streamwise and spanwise directions given by  $S_x = k_x^2 E_{uu}(k_x)$  and  $S_z = k_z^2 E_{uu}(k_z)$  where  $E_{uu} = |\hat{U}\hat{U}^*|$  is the squared norm of the velocity Fourier transform  $\hat{U}$ . The results are compared with FD2 case of [32] corresponding to a finite difference DNS on a  $512 \times 256 \times 256$  grid. One can note the very good agreement between VFRG curve with the reference data. The spectra presented here can be decomposed into two areas: a physical area for moderate  $k$  values and a *tail* which is due to the poor accuracy of the schemes for highest wavenumbers. For the VFRG, the physical area extends up to very small energy ranges and this grid can be considered as sufficient to resolve all the flow scales. The CRG fails to resolve a large range of the physical modes (given by VFRG) in both  $x$  and  $z$  directions. In the  $x$  direction, CRG and MRG grids have the same resolution and the tail occurs at relatively small wavenumbers for which the energy is not negligible. The overestimate of the spectra observed for CRG in both  $x$  and  $z$  directions and for MRG in  $x$  direction can clearly be attributed to the aliasing.

The CRG-OVER approach reduces partially the aliasing errors in the  $z$  direction but not in the  $x$  direction. It can be seen that the CRG-F5 and CRG-F50 approaches are clearly too aggressive and lead to an under estimate of the spectra. The CRG-F100 gives the better results and matches well with the physical spectra up to

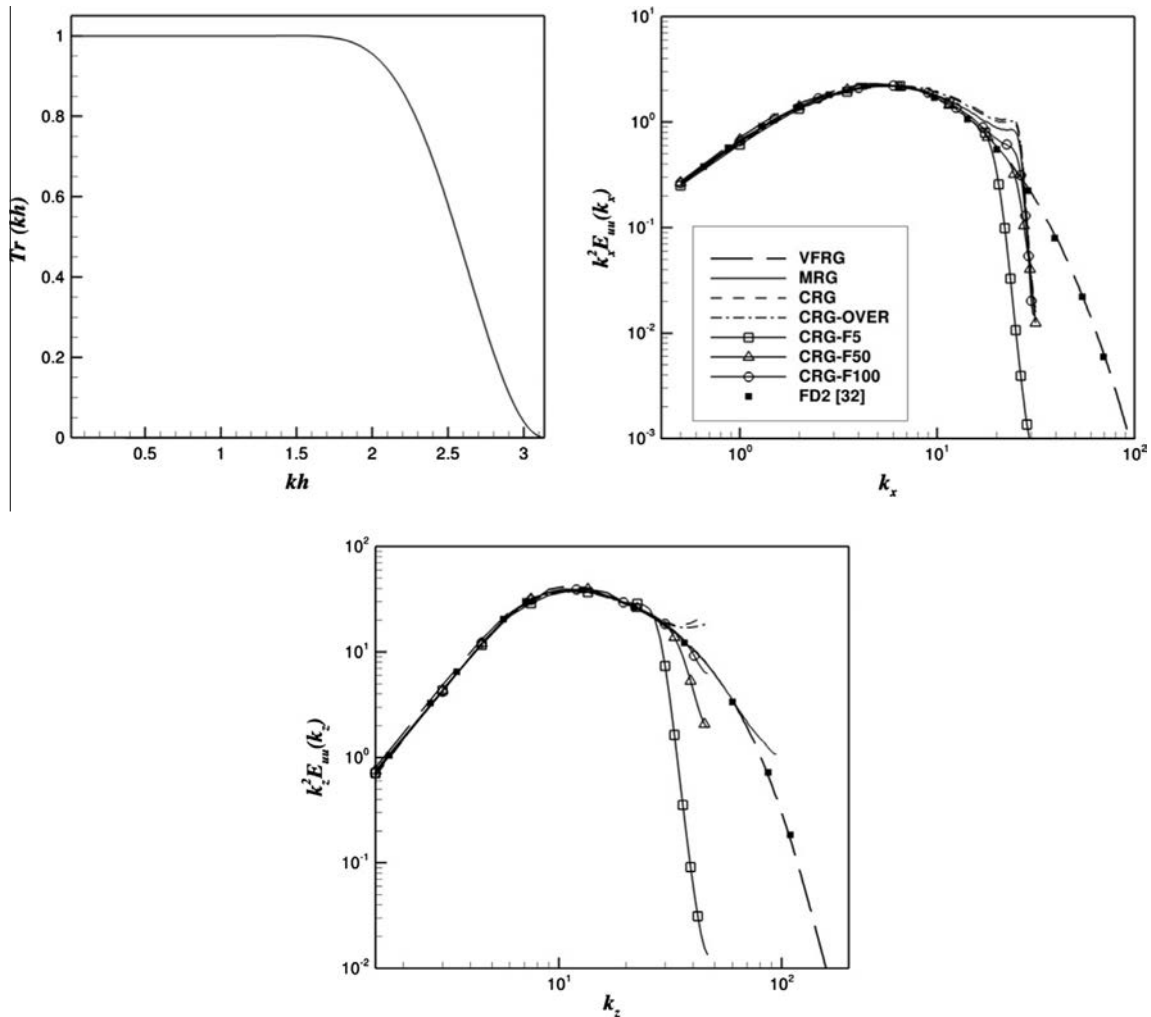


Fig. 12. (a) EOF transfer function as function of  $kh$ . (b and c) Premultiplied spectra of streamwise velocity in  $x$  and  $z$  directions at  $y^+ = 30$ . The spectra are compared with FD2 case of [32].

**Table 4**

Resolution and grid spacing for medium, coarse and Moser grids. The dimensions of computational domain are the same in the three cases ( $4\pi h \times 2h \times 4\pi h/3$ ).

Grid	$N_x \times N_y \times N_z$	$\Delta x^+$	$\Delta y_{min}^+ / \Delta y_{max}^+$	$\Delta z^+$
Coarse (CRG)	$128 \times 64 \times 64$	17.7	1/11	11.8
Medium (MRG)	$128 \times 128 \times 128$	17.7	0.45/5.6	5.9
Moser [33]	$128 \times 128 \times 128$	17.7	0.05/4.4	5.9

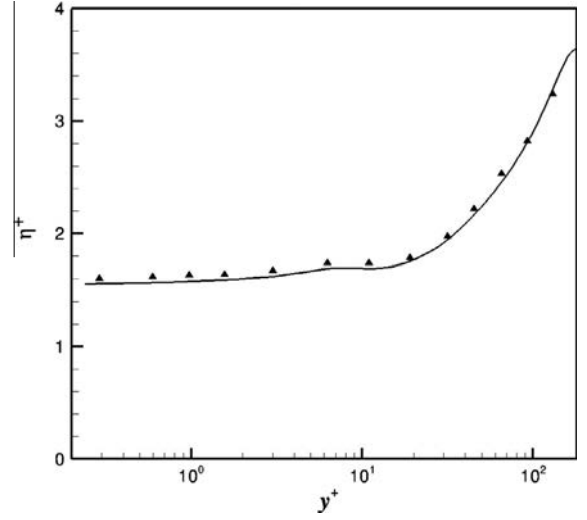
the tail. In the following DNS results, the EOF filter will be applied every 100 time steps in the three directions for the CRG grid and only in the  $x$  direction for the MRG grid.

### 5.3. Turbulent statistics

Two sets of results at  $Re_\tau = 180$  have been obtained on MRG and CRG grids. As mentioned before, the so-called medium resolution grid (MRG) corresponds to  $128 \times 128 \times 128$  computational nodes in a domain with sizes  $L_x^+ = 4\pi h^+$  in the streamwise,  $L_y^+ = 2h^+$  in the wall normal and  $L_z^+ = \frac{4}{3}\pi h^+$  in the spanwise directions. Here,  $(+)$  denotes the variables non dimensionalized by the inner variables that are the viscosity  $\nu$ , and the shear velocity  $\bar{u}_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$  where  $\rho$  stands for the density and  $\bar{\tau}_w$  for the wall shear stress. The computational point nearest to the wall is at  $\Delta y_{min}^+ = 0.45$ , while  $\Delta y^+$  at the centerline is  $\Delta y_{max}^+ = 5.6$ . The grid spacing in the streamwise and spanwise directions is  $\Delta x^+ = 17.7$  and  $\Delta z^+ = 5.9$ . The computational domain is the same in the coarse resolution grid (CRG) but the number of modes is decreased to  $128 \times 64 \times 64$  on purpose, as we will discuss hereafter. The point closest to the wall is  $\Delta y_{min}^+ = 1$  and  $\Delta y^+$  increases up to  $\Delta y^+ = 11$  at the channel centerline in CRG. The grid spacing in the streamwise direction is the same ( $\Delta x^+ = 17.7$ ) while it is twice as large as in the spanwise direction ( $\Delta z^+ = 11.8$ ). Table 4 recapitulates the characteristics of coarse and medium grids together with for Moser's simulations [33] which will be used as reference data hereafter. As discussed before, the time step chosen for all simulations is  $\Delta t = 0.006$ , which corresponds to a Courant–Friedrichs–Levy number (CFL) of 0.2. In order to reach statistical convergence, simulations have been performed on a large-enough period (200,000 iterations) from an already converged field.

Fig. 13 shows the Kolmogorov scale  $\eta^+ = (\bar{\epsilon}^+)^{-1/4}$  obtained in finer grid through the compact scheme. EO and the standard second order finite difference schemes lead to the same distribution and therefore are not shown in Fig. 13. There are twelve terms in the dissipation expression  $\bar{\epsilon} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  where  $u_i$  denotes the fluctuations of the velocity component  $U_i$ . The  $\bar{\epsilon}$  profile (not shown) is in perfect agreement with [34] who analyzed the vorticity-velocity formulated semi-spectral DNS data of [7]. The only exception is at the wall, where our results indicate a slightly larger value of  $\bar{\epsilon}_w^+ = 0.170$  compared to  $\bar{\epsilon}_w^+ = 0.166$  as reported in [35]. It is seen in Fig. 13 that  $\eta^+$  varies from nearly 1.6 in the viscous and low buffer layers to 4 at the channel centerline. The wall normal mesh size next to the wall  $\Delta y_{min}^+ = 0.45$  is three times smaller than the Kolmogorov scale. The grid spacing in MRG near the centerline is comparable to  $\eta^+$ . The major contribution to  $\bar{\epsilon}^+$  near the wall, comes from derivatives in the  $y$  direction that are adequately resolved here. The mesh sizes in the streamwise and spanwise directions seem to be inadequate but the computed spectra did not show any pile-up, as in Antonia et al. [34]. More precisely, the dissipation is governed by  $\bar{\epsilon}^+ \propto \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+}$  in the viscous and low buffer layers at  $y^+ \leq 10$  and the spanwise and streamwise derivatives play a progressive role further in the inner region. Thus, the Kolmogorov scale distribution shown in Fig. 13 together with the Taylors scales

$\lambda_i^{+2} = \overline{u^+}^2 / \left( \frac{\partial u^+}{\partial x_i^+} \right)^2$  profiles reported in Fig. 14 are the characteristic

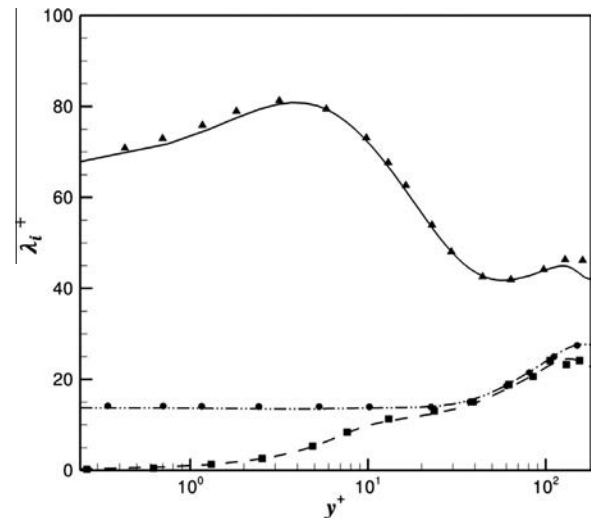


**Fig. 13.** Kolmogorov scale distribution obtained through compact schemes in the medium grid. Symbols are from Antonia et al. [34].

scales that are appropriately resolved through the medium mesh at this particular Reynolds number.

The wall normal resolution is relaxed in the coarse grid configuration, typically by a factor of two. Fig. 15 shows the ratio  $\Delta y^+/\eta^+$  versus  $y^+$ . Tolerating a limit  $\Delta y^+/\eta^+ < 1.5$ , only the zone up to the median buffer layer  $y^+ = 15$  is theoretically well resolved in CRG. Yet, the pressure field relates the velocity field at a given point to the whole domain through local pressure-strain correlations and so, whether adequate numerical schemes can reproduce the statistics in the coarse grid or not is an entirely open question. Curiously enough, EO and compact schemes give satisfactory results in this moderately well resolved turbulent channel flow, as we will discuss later.

As a first step, we can investigate the medium grid results in order to check the ability of each configuration to give physically relevant results on a fine enough grid. For this purpose, our results are compared to the statistics [33] obtained by the semi spectral DNS code of [7]. In this reference computation,  $128 \times 128 \times 128$  nodes are used to discretize a computational box of  $L_x^+ = 4\pi h^+$ ,  $L_y^+ = 2h^+$  and  $L_z^+ = \frac{4}{3}\pi h^+$ . The corresponding grid spacing is hence  $\Delta x^+ = 17.7$ ,  $\Delta y_{max}^+ = 4.4$  and  $\Delta z^+ = 5.9$ . The Moser mesh configuration is resumed in Table 4. The Root Mean Square



**Fig. 14.** Taylor scales distribution obtained through compact schemes in the medium grid. Symbols are from [34].  $\lambda_1^+$  (solid line),  $\lambda_2^+$  (dashed line) and  $\lambda_3^+$  (dash dot line).

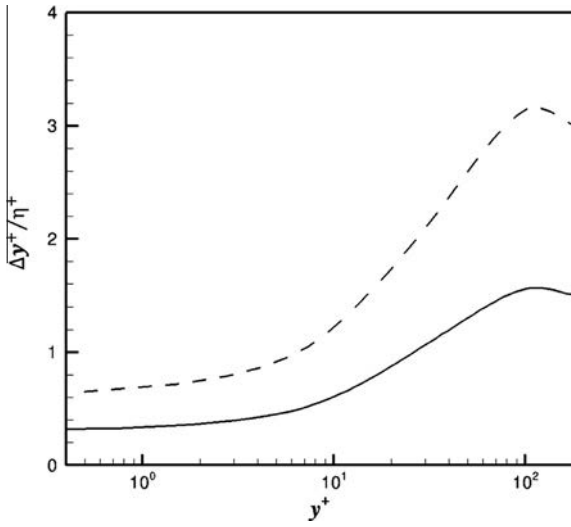


Fig. 15. Ratio  $\Delta y^+/\eta^+$  for coarse (dashed line) and medium (solid line) grid.

(r.m.s) profiles of velocity  $u_i^+ = \sqrt{\overline{u_i u_i}}/\bar{u}_\tau$ , pressure  $p^+ = \sqrt{\overline{p p}}/(\rho \tau u_\tau^2)$  are shown in Fig. 16. Fig. 17 shows the r.m.s of the fluctuating streamwise  $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ , wall normal  $\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$

and spanwise  $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  vorticity components in wall units. We can note a very good agreement between EO and compact configurations and the Moser results. It is also interesting to note that the O2 configuration profiles differ slightly from EO and compact configurations profiles, particularly for pressure and vorticity profiles. This difference is not surprising and confirms the results of the spectral analysis where EO and CS have shown comparable (and very good) properties.

The turbulent intensity  $u_i^+$  and  $p^+$  pressure profiles obtained in the moderately resolved coarse grid configuration are shown in Fig. 18. Results inferring from compact schemes obtained in the medium grid are used as reference. The EO filter presented in the previous section is used for compact and EO configuration at every 100 time steps. The results of EO configuration without any filtering are also given for comparison. It is seen that EO and compact configurations have similar profiles. They match curiously well the medium grid data while the results of the O2 configuration are clearly worsened by the poor grid resolution and become irrelevant. This is particularly the case for the pressure profiles where EO and CS remain relatively close to medium grid results while the O2 configuration underestimates considerably  $p^+$ . The underestimation of pressure fluctuations depicted by O2 in MRG grid (Fig. 16) is further accentuated by the poor resolution in CRG grid. These results constitute indirect proof of the superiority of

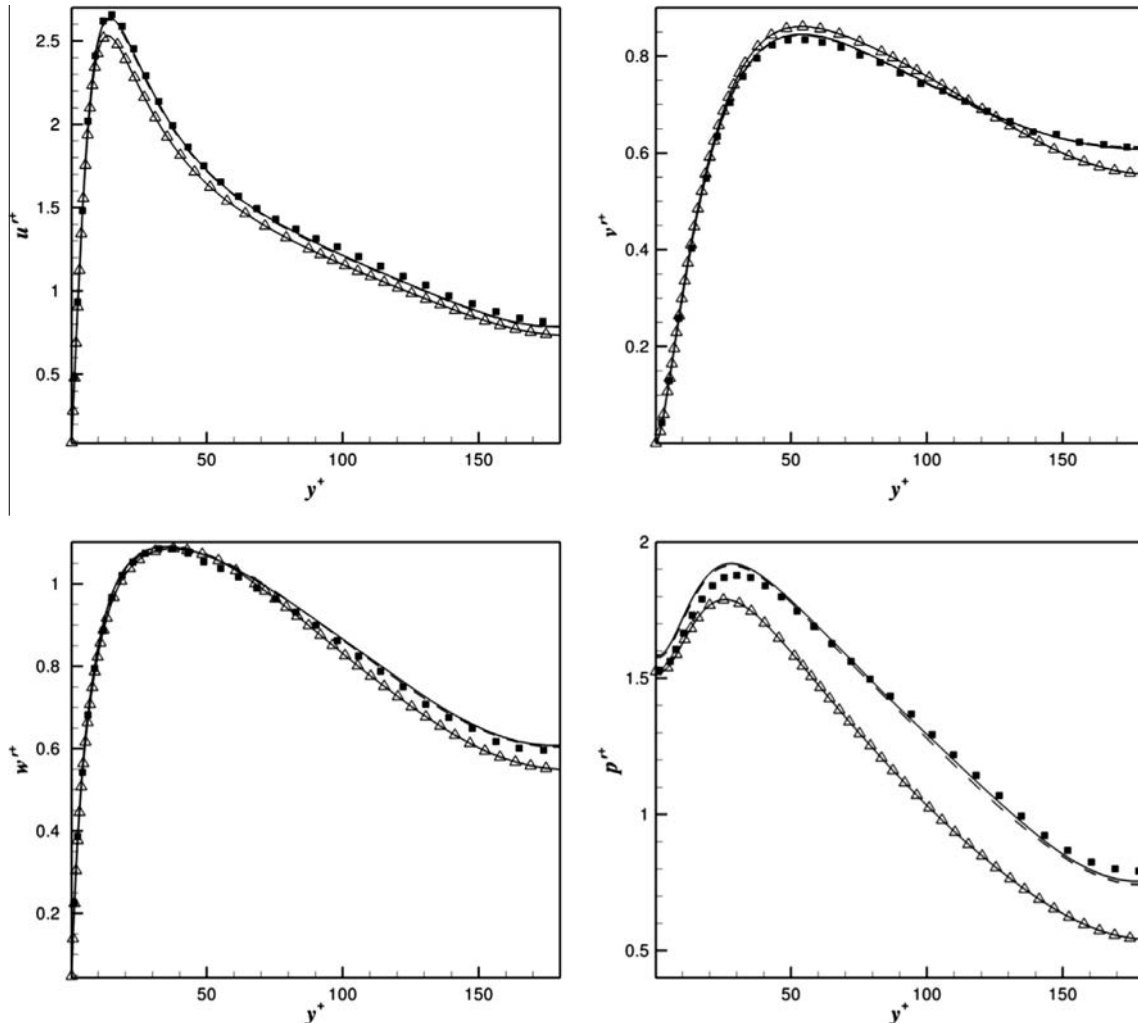


Fig. 16. R.m.s profiles for velocity components and pressure on medium grid ( $128 \times 128 \times 128$ ). O2 ( $\triangle$ ), CS (dashed line), EO (solid line) configurations and Moser [33] ( $\blacksquare$ ).



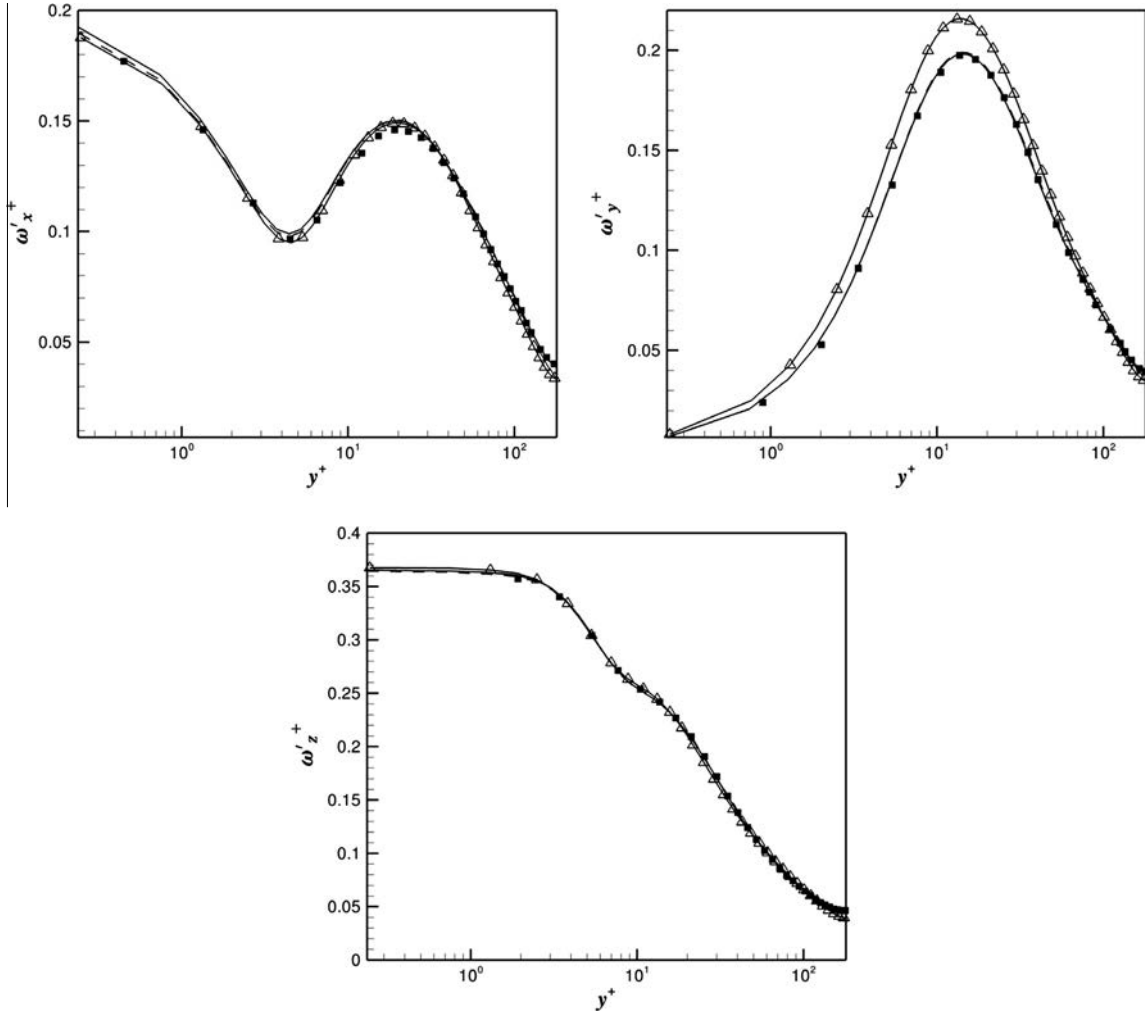


Fig. 17. R.m.s of vorticity on medium grid ( $128 \times 128 \times 128$ ). O2 ( $\triangle$ ), CS (dashed line), EO (solid line) configurations and Moser [33] ( $\blacksquare$ ).

compact and EO schemes as reported in related past studies on large eddy and direct numerical simulations [12]. From a physical point of view, the pressure is governed by the Poisson equation and depends upon the whole flow field. The pressure satisfies for instance

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} = -2 \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = f(x_i, t)$$

with solution

$$p = -\frac{1}{4\pi} \int_V f(x_i, t) G dV \quad (20)$$

over the whole flow volume  $V$  and where  $G$  is the Green function subject to homogeneous Neumann conditions at the wall. The surface integral that includes the non-homogeneous wall condition related to the so-called Stokes pressure is negligible. Eq. (20) is the expression of the pressure at a given point in terms of contributions from different points. It turns out that the mean contributions to  $p^+$  in the wall region  $y^+ < 100$  are rather local according to [36], although source terms everywhere across the channel may affect the instantaneous pressure. Given the appropriate spectral characteristics of compact and EO schemes, and the relatively acceptable resolution in the buffer layer of the coarse grid, may give a plausible explanation of why  $p^+$  collapse well in this grid.

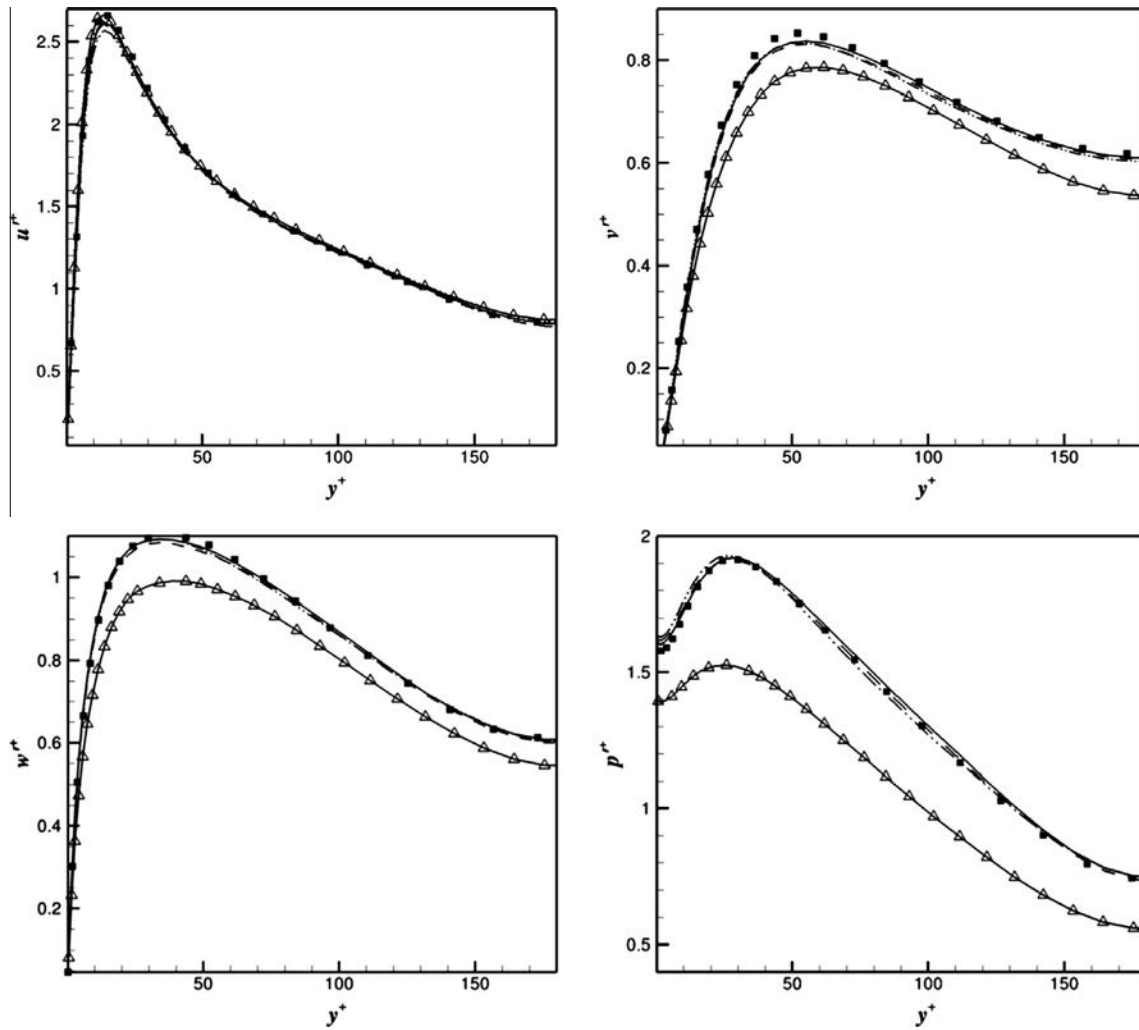
The satisfactory agreement of the EO and CS in the medium and coarse grids is once more surprising at a first glance and deserves further comment. Recall first, from Fig. 15, that the grid spacing varies from 0.6 to 2.5 Kolmogorov scale and is, after all, not too different from high  $Re$  number simulations of [6] in which the mesh size has been varied from 1 to  $1.8\eta$ . Secondly the low buffer layer that plays a capital role is well resolved in CRG. The coarse grid from here constitutes a limit situation for which adequate schemes such as CS or EO leads to acceptable results, at the particular low Reynolds number investigated here. All the schemes become irrelevant for further coarser configurations as expected.

#### 5.4. Convergence rate

The convergence rate of the numerical resolution resulting from EO configuration has been determined by using the  $L_2$  errors arising from three DNS performed on  $N \times 256 \times N$  grids where  $N = 64, 128$  and 256. The  $L_2$ -norm error for the statistical quantity  $Q$  is determined from two consecutive fields using  $N$  and  $2N$  points by:

$$L_2^{(g)} = \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} (Q_g(y(i)) - Q_{g+1}(y(i)))^2}$$

at the same position  $y$ , the subindex  $g$  standing for the  $(2^{g-1} * 64) * 256 * (2^{g-1} * 64)$  grid. The determination of the  $L_2$ -norm



**Fig. 18.** R.m.s profiles for velocity components and pressure on coarse grid. O2 ( $\triangle$ ), CS (dashed line), EO (solid line) configurations, EO without filtering (dash-dot-dot line) and CS on medium grid ( $\blacksquare$ ).

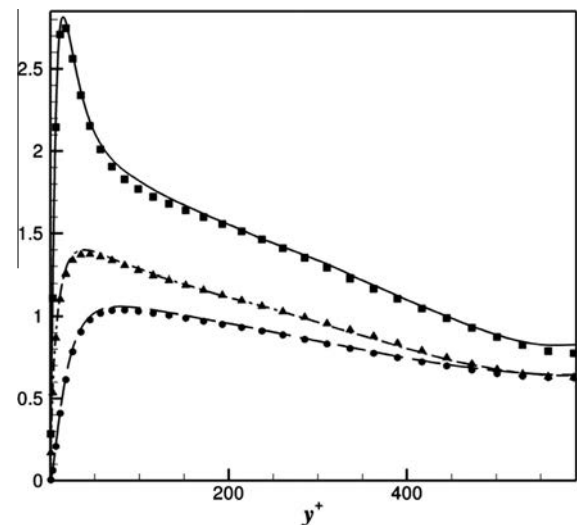
from two  $y$ -stretched grids with different  $N_y$  would require interpolation of data, and induce inescapably additional errors. Therefore, and despite the fact that the wall normal resolution is primordial, we had to fix  $N_y = 256$  in these particular runs. Five hundred independent fields have been used to ensure the statistical convergence.

The convergence rate  $\tau_c$  of the numerical solution is:

$$\tau_c^{(g)} = \frac{\log \left( L_2^{(g-1)} / L_2^{(g)} \right)}{\log \left( \sqrt[3]{(N_x N_y N_z)^{(g)} / (N_x N_y N_z)^{(g-1)}} \right)} = \frac{\log \left( L_2^{(g-1)} / L_2^{(g)} \right)}{\log(\sqrt[3]{4})}$$

The convergence rates for squared r.m.s of vorticity components are given in Table 5. The convergence rates obtained for the velocity and pressure fields are similar (about four) and are not shown here. It is seen that the convergence rate varies between three to

five. This value is presumably underestimated because the wall normal resolution is kept constant. It must finally be noted that



**Fig. 19.** Turbulent intensities of the velocity components for  $Re_\tau = 590$ .  $u^+$  (solid line),  $v^+$  (long-dash lines),  $w^+$  (dash-dot line) are compared with Moser's results [33] (symbols).

**Table 5**

Convergence rate of EO configuration for the vorticity r.m.s.

Variable	Grid	$L_2$ rate
$(\omega_x')^2$	$64 \times 256 \times 64$	3.04
	$128 \times 256 \times 128$	
$(\omega_y')^2$	$64 \times 256 \times 64$	4.49
	$128 \times 256 \times 128$	
$(\omega_z')^2$	$64 \times 256 \times 64$	3.55
	$128 \times 256 \times 128$	

the truncation error of EO schemes is not necessarily dominated by the formal order of accuracy and the convergence rate cannot be directly related to the scheme order as usually done for standard schemes.

### 5.5. Higher Reynolds number DNS

DNS by EO schemes have been performed at  $Re_\tau = 590$  using the LSRK3 time integration scheme. The computational grid resolution is  $384 \times 423 \times 384$  and the domain size is  $L_x = 2\pi h$  and  $L_z = \pi h$ . The results are compared to the Moser simulations [33] obtained on a similar grid. The resolution in the  $y$  direction at the wall is one third of the Kolmogorov scale  $\eta$  and nearly  $\eta$  at the centerline. The total computational time after convergence is  $T_{tot} = 10 \frac{L_x}{U_c}$  (where  $U_c$  is the streamwise velocity at the centerline), allowing us to use 10 statistically independent fields to compute adequate statistics. We show in Fig. 19 the distribution of the turbulent intensities of the velocity components. The profiles in Fig. 19 compare very well with the pseudo-spectral DNS of Moser.

## 6. Concluding remarks

Highly accurate EO schemes have been presented and applied to direct numerical simulations of an incompressible turbulent channel flow at a low Reynolds number ( $Re_\tau = 180$ ). Standard second order, EO and compact schemes have been implemented. The EO schemes proposed in this paper have been derived so as to obtain a high spectral resolution while maintaining a fourth order formal accuracy. They are further compared with standard second order and compact schemes.

DNS have been performed on a medium and a coarse grid in order to study the sensitivity of the various schemes configurations to the mesh resolution. Both compact and EO results compare well with published data obtained through pseudo-spectral strategies. The quasispectral accuracy is even achieved when the wall normal resolution is relaxed up to three times the Kolmogorov scale near the channel centerline. EO and CS results obtained on the coarse

grid match surprisingly well the medium grid results while the standard second order configuration becomes clearly irrelevant. These results can be explained on one hand by the correct resolution of the coarse configuration in the low buffer layer and on the other hand by the desirable spectral resolution of EO and compact schemes. Compact schemes and EO statistics match very well as it could be expected from their similar spectral accuracy. However, pressure statistics seem to be more sensitive to the discretization errors than the others quantities.

Performances of EO and compact schemes have also been compared. The EO scheme implementation we developed is found to be more efficient in terms of computational costs compared to two compact schemes implementations we considered. However, these results may be different in other operating environments and need further investigations to draw general conclusions. EO and CS are different not only in their implementation strategy, but also in their compatibility with the numerical framework. In our opinion, the main advantage of the EO schemes over compact schemes lies in their simplicity of implementation. This is particularly important in the code parallelization where the explicit nature of EO makes the domain decomposition easier while the implicit nature of the compact schemes imposes the use of a 2D domain decomposition or even more sophisticated strategies [37,38].

We have also shown in this paper that the EO schemes are relevant for the DNS and can be viewed as an alternative way to resolve a turbulent incompressible channel flow with an explicit time advancement procedure. They can further be preferred to CS in some configurations basically because of their implementation, which is particularly simple.

## Acknowledgments

This work was granted access to the HPC resources of IDRIS under the allocation 100226 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

## Appendix A. DNS schemes coefficients

Coefficients of Eq. (14) for EO configuration ( $a_n = a_{-n}$ )

Cells	$y: j = 2$	$y: j = 3$	$y: j = 4, 5$	$y: \text{inner cells}, x, z: \text{all}$
Coefficients	$a_1 = 1/2$	$a_1 = 9/16$ $a_2 = -1/16$	$a_1 = 0.59333949899142$ $a_2 = -0.10875924848714$ $a_3 = 0.015419749495712$	$a_1 = 1.234102595369109$ $a_2 = -0.3184044667712$ $a_3 = 0.11029870162898$ $a_4 = -0.030619166038291$ $a_5 = 0.0046223358114003$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)	Global: $k_{max} = 0.4\pi$ Free parameter: $a_1$	Local: $Tr(kh) = 1$ for $kh = (0.9, 1.35, 1.8)$
Order	2	4	4	4

Coefficients of Eq. (14) for CS configuration

Cells	$y: j = 2$	$y: \text{inner cells}, x, z: \text{all}$
Coefficients	$\alpha_{-1} = 0$ $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ $a_{-1} = 1/4$ $a_1 = 3/2$ $a_2 = 1/4$	$\alpha_{-1} = \alpha_1$ and $a_{-n} = a_n$ $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = 3/10$ $a_1 = 12/16$ $a_2 = 1/20$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)
Order	4	6

**Appendix B:. D1S schemes coefficients**Coefficients of Eq. (15) for EO configuration ( $a_n = -a_{-n}$ )

Cells	$y: j=1$	$y: j=2$	$y: j=3,4$	$y: \text{inner cells, } x, z: \text{all}$
Coefficients	$a_1 = 1$	$a_1 = 9/8$ $a_2 = -1/24$	$a_1 = 1.189101951200039$ $a_2 = -0.07371764226669$ $a_3 = 0.006410195120004$	$a_1 = 1.229770180607572$ $a_2 = -0.30840585496884$ $a_3 = 0.10067299049373$ $a_4 = -0.025440011202968$ $a_5 = 0.0034026950705542$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)	Global: $k_{max} = 0.5\pi$ Free parameter: $a_1$	Local: $k_{eq}/k = 1$ for $kh = (0.9, 1.35, 1.8)$
Type	2	4	4	4

Coefficients of Eq. (15) for CS configuration

Cells	$y: j = 1$	$y: \text{inner cells, } x, z: \text{all}$
Coefficients	$\alpha_{-1} = 0$ $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = -1$ $a_{-1} = -1$ $a_1 = 2$ $a_2 = -1$	$\alpha_{-1} = \alpha_1$ and $a_{-n} = -a_n$ $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = 9/62$ $a_1 = 63/62$ $a_2 = 17/186$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)
Order	4	6

**Appendix C:. D1C schemes coefficients**Coefficients of Eq. (17) for EO configuration ( $a_n = -a_{-n}$ )

Cells	$y: j=2$	$y: j=3$	$y: j=4, 5$	$y: j = 6$	$y: \text{inner cells, } x, z: \text{all}$
Coefficients	$a_1 = 1/2$	$a_1 = 2/3$ $a_2 = -1/12$	TWS [14] $a_1 = 0.7992664269742$ $a_2 = -0.1894131415793$ $a_3 = 0.0265199520615$	$a_1 = 0.8878646140108$ $a_2 = -0.3064241587094$ $a_3 = 0.1044308738880$ $a_4 = -0.0264338338081$ $a_5 = 0.0034852833952$	$a_1 = 0.9156761296334$ $a_2 = -0.3487613324475$ $a_3 = 0.1434845898017$ $a_4 = -0.0508502076014$ $a_5 = 0.0130513740662$ $a_6 = -0.0017438790115$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)	Global: $k_{max} = 0.5\pi$ Free parameter: $a_1$	Local: $k_{eq}/k = 1$ for $kh = (0.9, 1.35, 1.8)$	Local: $k_{eq}/k = 1$ for $kh = (0.8, 1.2, 1.6, 2.0)$
Order	2	4	4	4	4

Coefficients of Eq. (17) for CS configuration

Cells	$y: j = 2$	$y: j = 3$	$y: \text{inner cells, } x, z: \text{all}$
Coefficients	$\alpha_{-1} = 0$ $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = 1$ $a_{-1} = -1/6$ $a_0 = -3/2$ $a_1 = 3/2$ $a_2 = 1/6$	$\alpha_{-1} = \alpha_1$ and $a_{-n} = -a_n$ $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = 1/3$ $a_1 = 14/18$ $a_2 = 1/36$	Kim 1996 [18] $\alpha_{-1} = \alpha_1$ and $a_{-n} = -a_n$ $\alpha_0 = 1$ $\alpha_1 = 0.408589269$ $a_1 = 0.784049106$ $a_2 = 0.06791427675$ $a_3 = -0.003762796833$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)	Global [18]
Order	4	6	6

## Appendix D:. D2C schemes coefficients

Coefficients of Eq. (17) for EO configuration ( $a_n = a_{-n}$ )

Cells	$y: j = 2$	$y: j = 3$	$y: j = 4, 5$	$y: j = 6$	$y: \text{inner cells, } x, z: \text{all}$
Coefficients	$a_0 = -2$ $a_1 = 1$	$a_0 = -5/2$ $a_1 = 4/3$ $a_2 = -1/12$	$a_0 = -2.8147288822140$ $a_1 = 1.5693799949938$ $a_2 = -0.1777519979975$ $a_3 = 0.0157364441107$	$a_0 = -3.0310804701295$ $a_1 = 1.7552683593367$ $a_2 = -0.2924180309076$ $a_3 = 0.0625788254770$ $a_4 = -0.0109352562258$ $a_5 = 0.0010463373846$	$a_0 = -3.09478258071453$ $a_1 = 1.8129068317377$ $a_2 = -0.3347327651098$ $a_3 = 0.0870462532703$ $a_4 = -0.0214063366504$ $a_5 = 0.0039703382061$ $a_6 = -3.930310966 \times 10^{-4}$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)	Global: $k_{max} = 0.5\pi$  Free parameter: $a_1$	Local: $(k^2)_{eq}/k^2 = 1$ for $kh = (0.9, 1.35, 1.8)$	Local: $(k^2)_{eq}/k^2 = 1$ for $kh = (0.8, 1.2, 1.6, 2.0)$
Order	2	4	4	4	4

Coefficients of Eq. (17) for CS configuration

Cells	$y: j = 2$	$y: \text{inner cells, } x, z: \text{all}$
Coefficients	$\alpha_{-1}=0$ $\alpha_0=1$ $\alpha_1=-1$ $a_{-1}=1$ $a_0=-3$ $a_1=3$ $a_2=-1$	$\alpha_{-1} = \alpha_1$ and $a_{-n} = a_n$ $\alpha_0=1$ $\alpha_1=2/11$ $a_0=-102/44$ $a_1=12/11$ $a_2=3/44$
Optimisation	No (Taylor)	No (Taylor)
Order	4	6

## References

- [1] Tardu S. Statistical approach to wall turbulence. ISTE-John Wiley & Sons; 2011.
- [2] Ferziger J, Peric M. Computational method for fluid dynamic. Springer; 1996.
- [3] Sagaut P. Large eddy simulation for incompressible flows. Springer; 2006.
- [4] Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. Annu Rev Fluid Mech 1998;30:539–78.
- [5] Jimenez J. Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments? J Turbul 2003;4:1–14.
- [6] Hoyas S, Jiménez J. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . Phys Fluids 2006;18:011702.
- [7] Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. J Fluid Mech 1987;177:133–66.
- [8] Hussaini MY, Zang TA. Spectral methods in fluid dynamics. Annu Rev Fluid Mech 1987;19:339–67.
- [9] Canuto C, Hussaini MY, Quarteroni A, Zang TA. Spectral methods: fundamentals in single domains. Springer; 2006.
- [10] Doche O, Tardu S. Wall transfer mechanism under steady localized blowing. Int J Heat Mass Transfer 2012;55:1574–81.
- [11] Orlandi P. Fluid flow phenomena: a numerical toolkit. Kluwer Academic Publishers; 2000.
- [12] Laizet S, Lamballais E. High-order compact schemes for incompressible flows: a simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. J Comput Phys 2009;228:5989–6015.
- [13] Nagarajan S, Lele SK, Ferziger JH. A robust high-order compact method for large eddy simulation. J Comput Phys 2003;191:392–419.
- [14] Tam CK, Webb JC. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. J Comput Phys 1993;107:262–81.
- [15] Bogey C, Bailly C, Juvé D. Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible large eddy simulation. Theoret Comput Fluid Dyn 2003;16:273–97.
- [16] Sengupta TK, Ganerwal G, De S. Analysis of central and upwind compact schemes. J Comput Phys 2003;192:677–94.
- [17] Lele SK. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J Comput Phys 1992;103:16–42.
- [18] Kim JW, Lee DJ. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution. AIAA J 1996;34:887–93.
- [19] Sengupta T, Vijay VVSN, Bhaumik S. Further improvement and analysis of CCD scheme: dissipation discretization and de-aliasing properties. J Comput Phys 2009;228:6150–68.
- [20] Boyd JP. Chebyshev and Fourier spectral methods. Courier Dover Publications; 2001.
- [21] Mohan Rai M, Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. J Comput Phys 1991;96:15–53.
- [22] Abe H, Kawamura H, Matsuo Y. Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence. J Fluids Eng 2001;123:382–93.
- [23] Spalart PR, Moser RD, Rogers MM. Spectral methods for the Navier–Stokes equations with one infinite and two periodic directions. J Comput Phys 1991;96:297–324.
- [24] Moin P, Kim J. Numerical investigation of turbulent channel flow. J Fluid Mech 1982;118:341–77.
- [25] Perić M, Kessler R, Scheuerer G. Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and collocated grids. Comput Fluids 1988;16:389–403.
- [26] Morinishi Y, Lund TS, Vasilyev OV, Moin P. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow. J Comput Phys 1998;143:90–124.
- [27] Stanescu D, Habashi WG. 2N-storage low dissipation and dispersion Runge–Kutta schemes for computational acoustics. J Comput Phys 1998;143:674–81.
- [28] Dipankar A, Sengupta TK. Symmetrized compact scheme for receptivity study of 2D transitional channel flow. J Comput Phys 2006;215:245–73.
- [29] Laizet S, Li N. Incompact3d: a powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $O(10^5)$  computational cores. Int J Numer Meth Fluids 2011;67:1735–57.
- [30] Phillips NA. An example of non-linear computational instability. The atmosphere and the sea in motion. Rockefeller Institute Press and the Oxford University Press; 1959. p. 501–504.
- [31] Kawamura T, Takami H, Kuwahara K. New higher-order upwind scheme for incompressible Navier–Stokes equations. In: Ninth international conference on numerical methods in fluid dynamics; 1985. p. 291–291.
- [32] Vreman AW, Kuerten JGM. Comparison of direct numerical simulation databases of turbulent channel flow at  $Re_\tau = 180$ . Phys Fluids 2014;26:015102.

- [33] Moser RD, Kim J, Mansour NN. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re\tau = 590$ . *Phys Fluids* 1999;11:943–5.
- [34] Antonia RA, Kim J, Browne LWB. Some characteristics of small-scale turbulence in a turbulent duct flow. *J Fluid Mech* 1991;233:369–88.
- [35] Mansour NN, Kim J, Moin P. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J Fluid Mech* 1988;194:15–44.
- [36] Kim J. On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow. *J Fluid Mech* 1989;205:421–51.
- [37] Sengupta T, Dipankar A, Rao AK. A new compact scheme for parallel computing using domain decomposition. *J Comput Phys* 2007;220:654–77.
- [38] Kim JW, Sandberg RD. Efficient parallel computing with a compact finite difference scheme. *Comput Fluids* 2011;58:70–87.



## Annexe B

Article paru dans la revue *Journal  
of Turbulence*

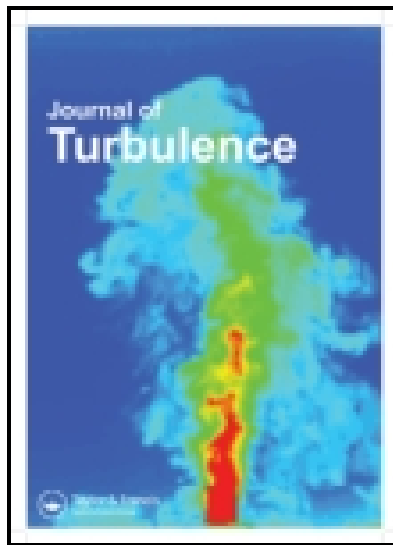


This article was downloaded by: [Sedat Tardu]

On: 18 May 2015, At: 09:30

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



## Journal of Turbulence

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/tjot20>

### Level-crossing statistics and production in low Reynolds number wall turbulence

Sedat Tardu<sup>a</sup> & Frédéric Bauer<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (LEGI), B.P. 53 X, Grenoble, Cédex 9, France

Published online: 13 May 2015.



CrossMark

[Click for updates](#)

**To cite this article:** Sedat Tardu & Frédéric Bauer (2015) Level-crossing statistics and production in low Reynolds number wall turbulence, Journal of Turbulence, 16:9, 847-871, DOI: [10.1080/14685248.2015.1033059](https://doi.org/10.1080/14685248.2015.1033059)

**To link to this article:** <http://dx.doi.org/10.1080/14685248.2015.1033059>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms &

Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

# Level-crossing statistics and production in low Reynolds number wall turbulence

Sedat Tardu\* and Frédéric Bauer

*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (LEGI), B.P. 53 X, Grenoble, Cédex 9, France*

*(Received 10 November 2014; accepted 15 March 2015)*

Statistical properties at velocity level crossings are analysed in a low Reynolds number fully developed turbulent channel flow. Emphasis is placed on local production statistics conditioned by fixed amplitudes of the streamwise  $u$  and wall-normal  $v$  velocity components. Direct numerical simulations performed in large computational domains are used for this purpose. The Reynolds number based on the channel half width and the shear velocity varies from 180 to 1100. Particular attention is paid to correctly determine the conditional quantities at level crossings of  $u$  and  $v$  velocity fluctuations, to prevent biasing effects. Level crossings along the longitudinal  $x$  and spanwise  $z$  directions in homogeneous planes are introduced together with different characterisations, such as directional and contour crossings. The frequency of events detected at fixed thresholds follows a Gaussian model acceptably well. There is more level-crossing activity in the spanwise direction than in the streamwise. The mean conditional production distributions are dissymmetrical with respect to the level-crossing thresholds in the low buffer and viscous sublayers. These statistics differ significantly from a statistical model that assumes joint normality between  $u$  and  $v$ . There is a clear but relatively mild Reynolds number dependence of the conditional expected means of  $u$  and  $v$  that do not scale with inner, outer or mixed variables. The Reynolds number sensitivity of these statistics increases towards the edge of the wall layer.

**Keywords:** wall turbulence; production; conditional statistics; direct numerical simulations

## 1. Introduction

The essence of the logarithmic sublayer lies in the fact that the Reynolds stress is (hypothetically) constant and equal to  $\bar{u}_\tau^2$ , i.e.  $-\overline{uv} = \bar{u}_\tau^2$ , where  $u$  and  $v$  respectively are the streamwise and wall-normal fluctuating velocity components and  $\bar{u}_\tau$  is the shear velocity related to the wall shear stress  $\bar{\tau}_w$  and the fluid density  $\rho$  by  $\bar{u}_\tau = \sqrt{\bar{\tau}_w/\rho}$ . The logarithmic distribution thus results from certain extreme hypotheses, such as equilibrium between production and dissipation, or linear distribution of the mixing length. As the gradient in the logarithmic sublayer is  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \frac{\bar{u}_\tau}{\kappa y}$ , the production is inversely proportional to  $y$ , in a channel flow, because  $\bar{P} = -\overline{uv} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \frac{\bar{u}_\tau^3}{\kappa y}$ , or  $\bar{P}^+ = \frac{1}{\kappa y^+}$   $y^+ \geq 150$  (hereafter  $( )^+$  designates quantities scaled with wall variables, i.e. the kinematic viscosity  $\nu$  and the shear velocity  $\bar{u}_\tau$ ). Hoyas and Jiménez [1] showed that all the terms in the transport equation of turbulent shear stresses decrease as  $y^{-1}$  as we move further from the wall. These authors determined further the deviations between the different terms of the transport equations at

---

\*Corresponding author. Email: Sedat.Tardu@hmg.inpg.fr

the outer layer for  $y^+ \geq 150$ . They concluded that there is no significant dependence of the various components multiplied by  $y/\bar{u}_\tau^3$  on the Reynolds number. The large-scale passive structures contribute to the streamwise and spanwise turbulent intensities, but affect the Reynolds stress relatively little or not at all, which is in line with the original concept of active structures advanced by Townsend [2]. They do however play a major role in the transport of  $-\overline{uv}$  in the logarithmic sublayer. Structures as long as five times the outer length scale, that are either the packets of coherent vortices (large-scale motions, LSM) or the amalgamation of the packets (very-large-scale motions, VLSM) transport the majority of the Reynolds stress in this zone. [3–7] The situation is even more complex in the inner layer wherein the viscosity plays a dominant role. As a result, the scale governing the terms of the transport balance should be  $\bar{u}_\tau^4/\nu$ . Unlike the outer layer, where the local scale  $y/\bar{u}_\tau^3$  adequately describes the transport, Hoyas and Jiménez [1] observe significant differences between the profiles for different Reynolds numbers, particularly for the dissipation and the pressure-linked components. The production is spared from this discordance to some extent, but its dependence over the Reynolds number is still significant. Passive irrotational outer eddies modulate the streamwise velocity fluctuations in the inner layer and are responsible for the increase of streamwise and spanwise turbulent intensities.[8]

Eighty per cent of turbulence production next to the wall takes place during short ‘bursting’ periods covering around 10 inner units. The term ‘bursting’ was introduced by the pioneering group led by Kline, who has carried out studies on the detailed structure of turbulence from 1956 onward.[9] The earliest flow visualisations revealed that the low-velocity streaks ‘become detached’ and oscillate before from being ejected far from the wall in the form of a sudden eruption, dispersed over ‘small scales’.[10] It would be two decades before the realisation was made that bursting is merely a symptom of the passage of coherent structures. The coherent vortices locally induce intense Reynolds shear stress events. Turbulent production essentially arises from violent intermittent ‘ejections’ of low-velocity fluid toward the outer region and from ‘sweeps’ of high-velocity fluid toward the wall. Ejections and sweeps constitute the two important phases of the quasi-periodic sequence that is responsible for turbulence production.

One of the most effective approaches to analyse the shear stress producing events is to directly identify the structures in the intermittence of the instantaneous local Reynolds shear stress  $uv$ , through the classical quadrants technique, which deals with the repartition of the  $u - v$  events ([11]; see also [12] for a recent review). Yet, issues such as the interaction of a velocity component fluctuation assigned to an intense value with another turbulent quantity have not been adequately analysed up till now. Even the simplest question of how to determine the statistical moments of one component of velocity conditioned by assigned values of the other, has not been correctly addressed by the turbulence research community. Answers to such questions are important to have a deeper understanding of the fine structure of the Reynolds shear stress in wall-bounded flows. There are additional points that are also of interest, such as the frequency of occurrence of intense fluctuating velocity components and the adequacy of simple statistical models to describe the interaction between different velocity components and to predict the frequency of their occurrence.

A finer approach is therefore necessary, one that is different from the spectral or classical velocity moments, to elucidate some of the key points of the production process in wall-bounded flows. Palm statistics (so-called after the Swedish mathematician Conny Palm (1907–1951)) are the statistics of one random quantity conditioned by another. Such statistics have already been used in the turbulence community, but not always correctly. To give an example, consider the expected mean value of the local instantaneous production  $P = -uv \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$  conditioned by the  $u$  level crossings fixed at some

threshold  $\ell$ . One would be tempted to simply determine the expected mean  $E(P|u = \ell)$  by  $E(P|u = \ell) = -\ell \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} E(v|u = \ell)$ . We will demonstrate that this is not the correct approach. Here, we use direct numerical simulation (DNS) data of a turbulent channel flow and we consider level crossings in space contrary to existing literature that merely deals with experimental time series. We analyse the level crossings of the fluctuating velocity components separately in the streamwise and spanwise directions in homogeneous planes, a procedure that can hardly be realised experimentally. Last but not the least, the conditional statistics allow us to depict subtle effects of the large-scale passive structures on the production process in the inner layer that can hardly be revealed by classical spectral analysis.

Some of the main questions addressed in this paper are ‘how much do large amplitude streamwise  $u$ , and/or wall-normal  $v$  velocity fluctuations contribute to the production? What is the mean production conditioned by a fixed threshold of  $u$  or  $v$ ? How do the production Palm statistics vary with the Reynolds number?’ Existing literature with the level-crossing activity in wall turbulence is limited to the zero-crossings of the streamwise velocity fluctuations and the frequency of their occurrence. [13]–[15] The cumulative probability distribution of time intervals  $P(\tau)$  separating successive level crossings remains an unresolved problem even for Gaussian processes [16] and has been used by the turbulence community in an attempt to derive scaling laws in wall-bounded flows. Kailasnath and Sreenivasan [17] noticed that  $P(\tau)$  of zero crossings of streamwise velocity fluctuations  $u$  can be likened to two exponentials from which a small and large time scale can be extracted. The large time scale is independent of the Reynolds number while the small one scales as  $Re_\lambda^{-1/2}$ , where  $Re_\lambda$  is the Reynolds number based on the Taylors scale  $\lambda$ . Putting these investigations aside, there are no systematic studies in wall turbulence literature dealing with the statistics conditioned by the level crossings of fluctuating turbulent quantities.

Level-crossings techniques are commonly used in our community, each time the analysis requires a threshold assigned to some quantity such as in the coherent structures detection techniques [18, 19] to mention but a few. Special attention however, is needed to correctly determine the statistics of the related conditional quantities. The first objective of this paper is to correctly assess the Palm characteristics that are briefly exposed in Section 2. DNS performed in a turbulent channel flow in large computational domains are briefly described in Section 3. The simulations recover a Reynolds number ranging from low  $Re_\tau = h^+ = 180$  ( $h$  denotes the channel half width) to  $Re_\tau = 1100$  in particularly large computational domains. The analysis of the level-crossing activities, the production Palm statistics and the important issue dealing with their scaling are discussed in Section 4.

## 2. Level crossings and Palm statistics

### 2. 1. One-dimensional signals

The level-crossing problems are complex. The Palm statistics are introduced in a simple conceptual way in this session and the deeper details are provided in Appendix 1. Consider two stochastic stationary signals,  $u(t)$  and  $q(t)$ . The aim is to determine the statistics of  $q(t_i)$  conditioned by the events  $u(t_i) = \ell$  at a fixed threshold  $\ell$  of  $u(t)$  (Figure 1). The number of samples  $N_\ell$  in the interval  $[0, T]$  is exactly known to be [20], [21]

$$N_{\ell u} = T f_{\ell u} = T p(u = \ell) E \{ |u'| \mid u = \ell \}, \quad (1)$$

where  $f_{\ell u}$  is the frequency of  $u = \ell$  level crossings,  $E$  stands for the expected value,  $|$  refers to the conditional event,  $p(u)$  is the probability density function of  $u$  and  $|u'| = |du/dt|$

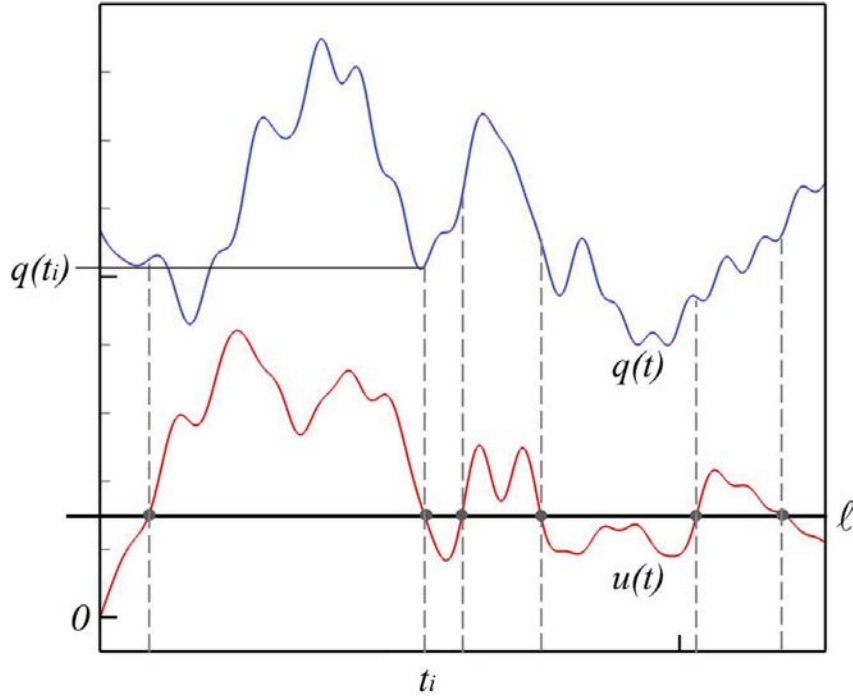


Figure 1. Samples of the signal  $q(t)$  conditioned by the level crossings of the signal  $u(t)$  at a given threshold  $\ell$ .

is its absolute derivative. At a first glance, one is tempted to determine the conditional moments  $\overline{q^n}_\ell$  by computing simply

$$\overline{q^n}_{\ell b} = \lim_{N_{\ell u}} \frac{\sum_{i=1}^{N_{\ell u}} q^n(t_i)}{N_{\ell u}} = E\{q^n | u = \ell\}. \quad (2)$$

The last equality is correct if and only if the number of samples that depends on  $|u'|$  is statistically independent of the quantity  $q$ . In return, if  $q(t)$  and  $|u'|$  are correlated, then  $N_{\ell u}$  depends on the quantity that is of interest and the (2) leads to biased moments. To give an example, experimentalists who deal with laser Doppler anemometry have to face a similar (but not identical) problem, because the number of samples is proportional to the velocity. Thus, the exact unbiased  $n$ th moment of  $q$  is given by [22], [23]

$$\overline{q^n}_\ell = \frac{E\{|u'| q^n | u = \ell\}}{E\{|u'| | u = \ell\}}. \quad (3)$$

Namely, the average  $\overline{q^n}$  at level-crossing points is the normalised mean of  $q^n$  weighted by the absolute velocity derivative. One has

$$\overline{q^n}_{\ell b} = E\{q^n | u = \ell\} \quad (4)$$

only if  $q$  and  $u'$  are statistically independent

$$E\{q^n | u' | u = \ell\} = E\{q^n | u = \ell\} E\{|u'| | u = \ell\}. \quad (5)$$

That is obviously not the general case. This point has not been clearly stated in previous investigations dealing with level-crossing problems in turbulence. The average quantity

given by (4) will be called the biased mean hereafter. Introducing the covariance

$$C_{q|u'|} = E\{q|u'| \mid u = \ell\} - E\{q \mid u = \ell\}E\{|u'| \mid u = \ell\} \quad (6)$$

for  $n = 1$ , the unbiased mean can be written as

$$\bar{q}_\ell = \frac{C_{q|u'|}}{E\{|u'| \mid u = \ell\}} + \bar{q}_{\ell b}. \quad (7)$$

Further details on the conditional probability densities and Palm statistics that may be useful for further investigations and applications can be found in Appendix 2 and in [22–24].

## 2.2. Multi-dimensional signals

One of the aims of this paper is to investigate the level-crossing characteristics in homogeneous planes  $y = \text{constant}$ , at a fixed time  $t$ , in the streamwise  $x$  and spanwise  $z$  directions through DNS in a turbulent channel flow. There are several ways to sample the data in this case. One can, for example, sample the velocity component  $u_i(x, z; y, t)$  in the homogeneous  $x$  direction along the constant  $z$  lines. In this case,  $u_i(x; z, y, t)$  is still a one-dimensional signal, and the relations obtained before apply directly by taking  $u' = \partial u_i / \partial x$ . One can also fix the sampling direction along  $z$ , and obtain the statistics of a quantity  $q$  at  $u_i(z; x, y, t) = \ell$  level crossings by assigning  $u' = \partial u_i / \partial z$ . These characteristics will be labelled as *directional* level-crossing properties hereafter.

## 3. Direct numerical simulations

DNS of four fully developed turbulent channel flows have been performed at Karman numbers  $Re_\tau = 180, 395, 590$  and  $1100$  in particularly large computational domains similar to Hoyas and Jiménez [25]. Periodical boundary conditions are used in the homogeneous streamwise  $x$  and spanwise  $z$  directions. The mesh nodes are distributed uniformly along  $x$  and  $z$ , and refined near the wall in the wall-normal  $y$  direction. The mesh size  $\Delta y$  is set to one-third of the Kolmogorov scale  $\eta$  near the wall while  $\Delta y \approx \eta$  at the centreline. The time integration is performed according to a fractional step approach in which convective and diffusive terms are integrated by a three stage and third-order low-storage Runge Kutta scheme. High accuracy fourth order optimised explicit schemes using a five points stencil are used in order to reach spectral-like accuracy. These schemes have dispersion relation preserving properties when the Courant–Friedrichs–Lewy number is smaller than 0.2, as is the case here. The details can be found in [26]. Table 1 gives the resolution, the grid spacings in wall units ( $\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+$ ) and the computational domain size scaled with the

Table 1. Simulations parameters in the streamwise, wall-normal and spanwise directions ( $x, y, z$ ). Both smallest (first line) and largest (second line) grid spacing are given for wall-normal direction. The number in parenthesis is the wall-normal grid spacing scaled by Kolmogorov length  $\eta$ .

$Re_\tau$	$Re_\tau$ actual	Resolution ( $N_x \times N_y \times N_z$ )	$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$	$l_x/h$	$l_z/h$
180	178	$771 \times 129 \times 387$	8.80	0.49 (0.31 $\eta$ )	5.59 (1.52 $\eta$ )	5.84	$12\pi$
395	396	$1691 \times 283 \times 849$	8.81	0.48 (0.33 $\eta$ )	5.57 (1.26 $\eta$ )	5.85	$12\pi$
590	588	$1651 \times 423 \times 1113$	8.98	0.48 (0.34 $\eta$ )	5.56 (1.15 $\eta$ )	5.00	$8\pi$
1100	1104	$3079 \times 789 \times 2075$	8.98	0.48(0.34 $\eta$ )	5.55 (0.98 $\eta$ )	5.00	$8\pi$



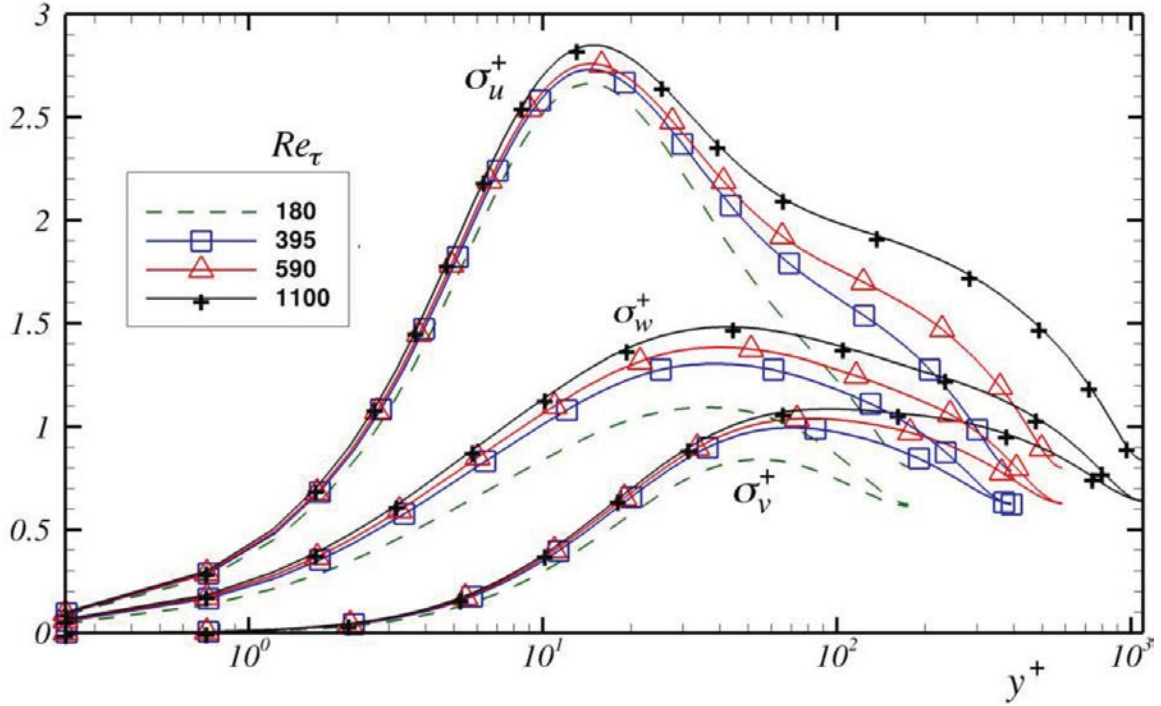


Figure 2. Turbulent intensities of the streamwise  $\sigma_u^+ = \sqrt{uu}/\bar{u}_\tau$ , wall-normal  $\sigma_w^+$  and the spanwise  $\sigma_v^+$  fluctuating velocity components versus the distance to the wall in inner variables, for different Reynolds numbers  $Re_\tau$ .

half height  $h$  of the channel ( $l_x/h$ ,  $l_z/h$ ). The statistics presented here have been obtained from 10 independent fields. Two fields are considered as independent, if they are separated by a time, larger than the time required for a particle, at the channel centre, to cross the length of the computational domain in the streamwise direction.

All the major turbulence statistics compare well with the published data obtained by pseudo-spectral DNS of the evolution problem for the wall-normal vorticity and the Laplacian of the wall-normal velocity as in [25]. We show in Figure 2 the distributions of the turbulent intensities of the velocity components  $\sigma_{u_i}^+ = \sqrt{u_i u_i}^+$ , as a sample of results we obtained. The streamwise and spanwise velocity fluctuations are directly affected by outer layer passive eddies.[27] Putting aside the case  $Re_\tau = 180$ , which is too low, the wall-normal velocity fluctuations are only marginally affected by the passive eddies at  $y^+ < 100$  [28] in concordance with the original passive eddies concept of Townsend [2]. According to Marusic et al. [29], the logarithmic sublayer begins at  $y^+ = 3\sqrt{Re_\tau}$  and ends at  $y^+ = 0.15 Re_\tau$ . Thus, ‘having at least one decade of separation (of 100 wall units extend) to have a clear distinction between the near wall and the log-layer structures requires  $Re_\tau > 1700$  as noted by Hutchins and Marusic [30]. Yet, much larger Reynolds numbers  $Re_\tau > 20 \times 10^3$  beyond which the Karman constant tends to its asymptotic value  $\kappa = 0.38$ , are needed in order that the viscous shear stress can truly be negligible compared to the Reynolds shear stress.[12, 29, 31] There is clearly no inertial sublayer in the universal sense at the maximum  $Re_\tau = 1100$  analysed here, but a clear meso-layer adjacent to the buffer layer  $30 \leq y^+ \leq 300$  wherein the dissipation depends on the viscosity.[32]

Directional level crossings are determined by detecting modifications of the sign of the velocity component  $u_i(i, j, k)$ . For instance, the streamwise crossings at a level  $L$  occur when  $[u_i(i, j, k) - L][u_i(i + 1, j, k) - L] < 0$ . Statistics are then obtained in the homogeneous  $j = cte$  planes by cumulating points along constant  $k$  lines. In the unified



approach of contour crossings that will be introduced later, both the streamwise and spanwise level crossings are collected together the difference being that the related statistics are weighted by the gradient  $|\vec{\nabla} u_i|$  (Equation 11) instead of the derivative  $|u'|$  in the directional  $x$  ( $|\partial u_i / \partial x|$ ) or  $z$  ( $|\partial u_i / \partial z|$ ) level crossings (Equation 3). The contour points determined individually in this way do not superimpose and the related statistics are not redundant. Cubic spline interpolation is used to determine characteristics at level or contour crossing points.

We will use hereafter mixed notations, i.e. the velocity component in the streamwise ( $x_1, x$ ) will be denoted by either  $u_1$  or  $u$ , the component in the wall-normal direction ( $y_2, y$ ) by  $u_2$  or  $v$  and the spanwise ( $x_3, z$ ) velocity component by  $u_3$  or  $w$ .

#### 4. Results

The conditional unbiased mean production at  $u_i$  directional level crossings reads for

$$\bar{P}_{\ell_{u_i}} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \ell_{u_i} \sigma_{u_i} (\overline{u_j})_{\ell_{u_i}}, \quad (8)$$

where according to (3)

$$(\overline{u_j})_{\ell_{u_i}} = \frac{E \left\{ u_j \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \mid u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i} \right\}}{E \left\{ \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \mid u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i} \right\}} \quad (9)$$

and  $x_k$  is  $x_k = x$  or  $x_k = z$  at either the streamwise or spanwise level crossings. The biased and unbiased statistics collapse for a Gaussian signal. If, it is further supposed that  $u_i$  and  $u_j$  are jointly normal, the Palm statistics of the production scaled by the mean local production  $\bar{P} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \bar{u} \bar{v}$  reduces to [21]

$$\frac{\bar{P}_{\ell_{u_i} G}}{\bar{P}} = \ell_{u_i}^2. \quad (10)$$

The hypothesis of joint normality between  $u$  and  $v$  has been supposed to be a suitable model by Lu and Willmarth [33] and Sreenivasan et al. [34] to investigate the moments of Reynolds shear stress in an atmospheric boundary layer. We will show that this assumption lead to acceptably accurate Palm statistics only at low amplitudes of velocity fluctuations, although the joint normality is never exactly reached in the entire layer.

The spanwise crossings events are more numerous than the streamwise ones as discussed in detail above, but the production Palm statistics do not significantly differ at  $x$  and  $z$  crossings. Figure 3 shows the  $\frac{\bar{P}_{\ell_u}}{\bar{P}}$  distributions versus the normalised threshold  $\ell_u$  at streamwise (Figure 3(a)) and spanwise (Figure 3(b))  $u$  crossings at  $y^+ = 12$ . Apart from some minor differences at large  $\ell_u$ , the profiles are nearly identical as expected, because of statistical streamwise and spanwise homogeneity, although this point had to be carefully checked as we did by examining all the statistics conditioned either by  $u$  or  $v$  crossings. Therefore, we will proceed hereafter, through a unified approach by making use of the contour crossings in the  $x - z$  plane. The level crossings are then replaced by surface elevation of the velocity component  $u_i(x, z; y, t)$  and the level crossings are consequently the level-crossing contours  $c(\ell) = \{(x, z) : u_i(x, z; y, t) = \ell\}$ . The average  $\bar{q}_\ell$  of a given

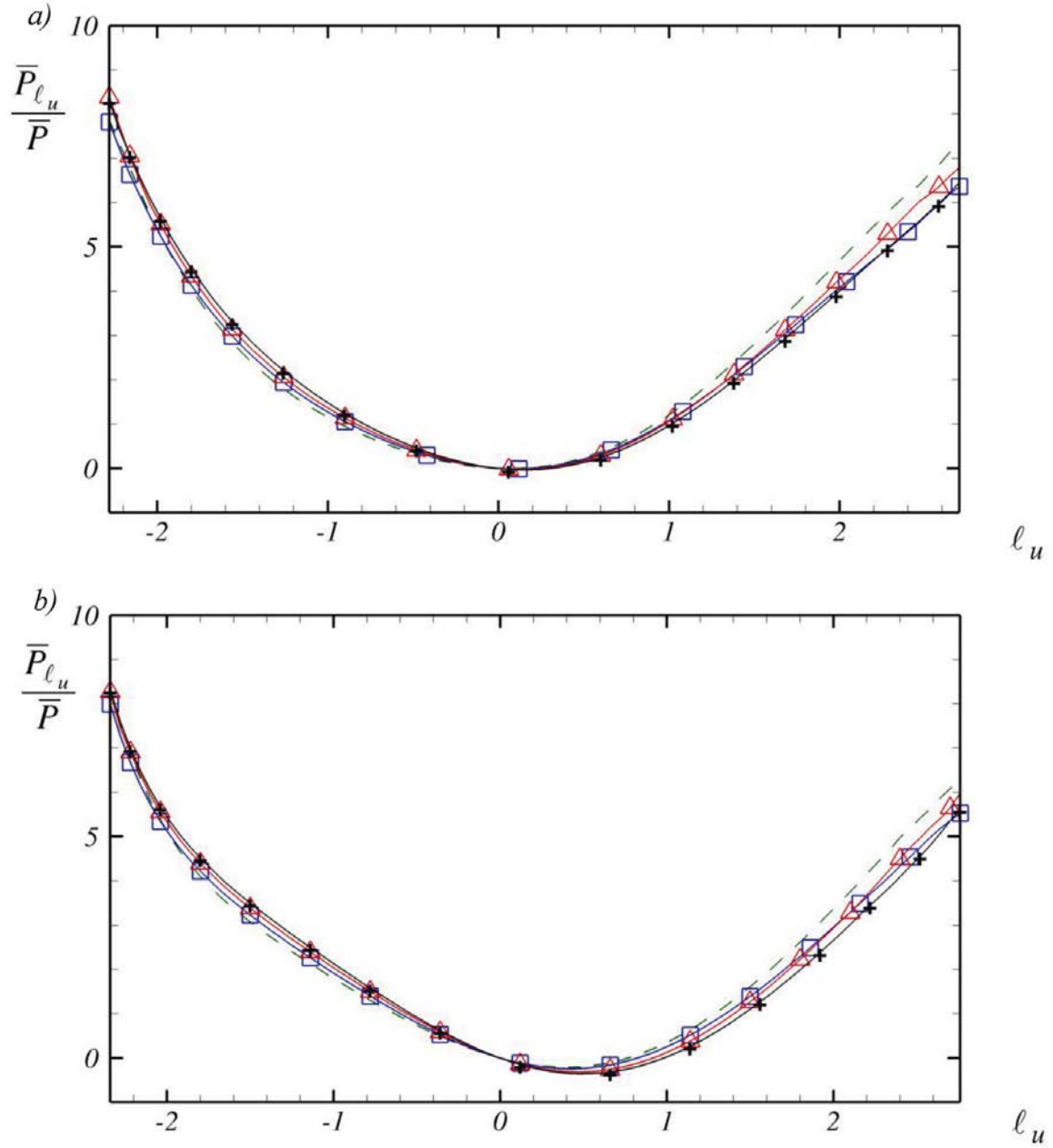


Figure 3. Unbiased mean production scaled by the local production  $y^+ = 12$ . Directional  $u$ -level crossings in the streamwise  $x$  (a) and the spanwise  $z$  (b) directions. See Figure 2 for legend.

quantity  $q$  at level-crossing contours is a straightforward generalisation of Equation (3) and reads for

$$\overline{(q)}_{\ell_{u_i}} = \frac{E \left\{ q \times \sqrt{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2} \mid u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i} \right\}}{E \left\{ \sqrt{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial z} \right)^2} \mid u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i} \right\}} \quad (11)$$

according to the generalised version of the Rice formula (see Appendix 2 and [35] for further details).

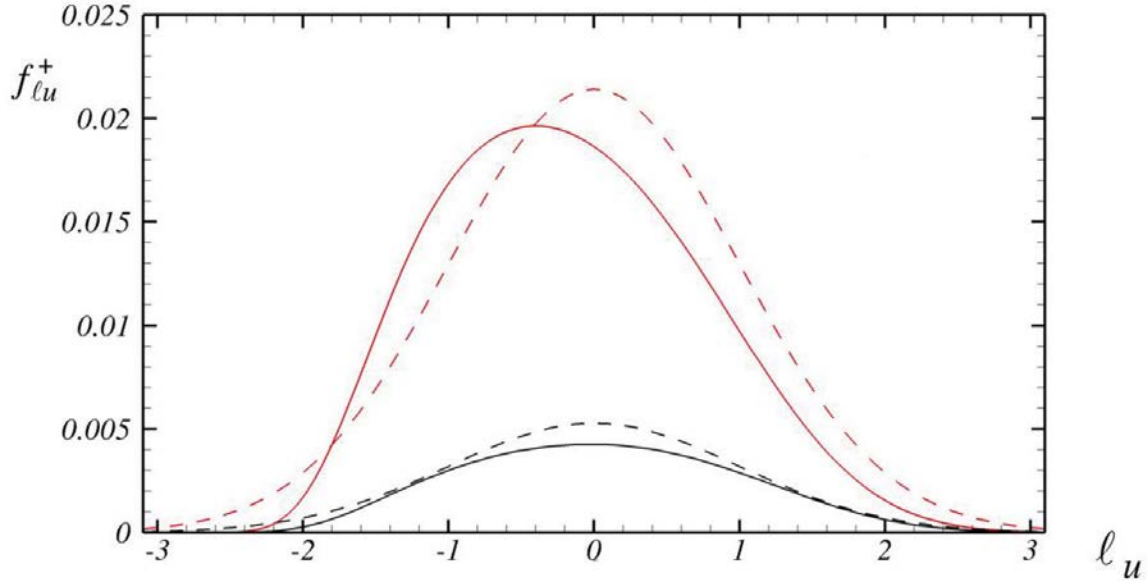


Figure 4. Level-crossing frequency of the streamwise velocity fluctuations at  $y^+ = 12$  and  $Re_\tau = 1100$  in the spanwise (upper curves in red) and streamwise (lower curves in black) directions. Dashed lines are the corresponding Gaussian frequencies (14).

#### 4.1. Frequency of level-crossing events

The frequency  $f_0$  of the zero-crossings of a Gaussian time series  $u(t)$  is given by  $f_{0u} = 1/\pi \sqrt{\overline{(du/dt)^2}}/\sigma_u$  and this is one of the best known results dating from Rice [20]. The Liepmann scale associated with  $f_0$  is defined as  $\Lambda = 1/\pi f_0$  [9]. For a Gaussian signal,  $\Lambda$  is equal to the Taylor scale  $\lambda = \sqrt{\sigma_u^2 / \overline{(du/dt)^2}}$ . Sreenivasan et al. [14] questioned this equivalence in wall-bounded turbulent flows and found that the Liepmann and Taylor scales coincide reasonably well. Tardu [15] has further reported that the frequency of the events crossing a prescribed threshold  $\ell \sigma_u$  follows more or less the distribution  $f_{\ell u} = f_0 \exp(-\ell^2/2)$  inferred from the Gaussian model. These results have all been obtained for the streamwise velocity time series obtained by hot wire measurements. Their extension to the directional level crossings in space is immediate, in which case the level-crossing frequency of a Gaussian signal would read as

$$f_{\ell u_i}^+ = p(u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i}) \sqrt{\frac{\pi u_i^{2+}}{2}} \frac{1}{\lambda_{u_i}^+} = \frac{1}{\pi \lambda_{u_i}^+} e^{-\frac{\ell_{u_i}^2}{2}}, \quad (12)$$

where the Taylor scale of, for example, the streamwise velocity component in  $x$  and  $z$  directions reads respectively for  $\lambda_{ux}^+ = \sqrt{\sigma_u^{+2} / \overline{(\partial u^+ / \partial x^+)^2}}$  and  $\lambda_{uz}^+ = \sqrt{\sigma_u^{+2} / \overline{(\partial u^+ / \partial z^+)^2}}$ . Figure 4 shows the level-crossing frequency distributions of the  $u$  fluctuations at  $y^+ = 12$  and  $Re_\tau = 1100$  in the streamwise and spanwise directions. It is seen that there is a reasonable coincidence between the level-crossing frequencies distributions and the model (12), except at large  $\ell_u$  thresholds marked by rare intermittent crossings, in particular along  $z$ , where  $f_{\ell u}^+$  is clearly skewed towards negative  $\ell_u < 0$  (ejections) events. Thus, the level-crossing frequency is inversely proportional to the Taylor scale at a given threshold, i.e.  $f_{\ell u_i}^+ \propto \frac{1}{\lambda_{u_i}^+}$ , at least in a rough sense. This is interesting for the experimentalists who can estimate the Taylor scales by simply counting the number of zero-crossings in the prescribed direction. The correspondence between the  $f_{\ell u_i}$  distributions and the Gaussian model (12) is only

approximate since the velocity components are strongly non-Gaussian near the wall. The exact level-crossing frequency is given in (1), i.e.

$$f_{\ell u_i}^+ = p(u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i}) E\{|u'| \mid u_i = \ell_{u_i} \sigma_{u_i}\}.$$

Model (12) supposes that  $|u'|$  and  $u_i$  are statistically independent and the derivative  $|u'|$  is also Gaussian. These hypotheses are too strong to expect better coincidence of  $f_{\ell u_i}^+$  with the distribution (12). The Taylor scales of both  $u$  and  $v$  are smaller in the spanwise direction than in the streamwise, and their corresponding level-crossing frequencies are consequently larger in  $z$  than in  $x$ , in the whole layer. The spanwise direction has consistently a larger level-crossing turbulent activity compared to the streamwise direction. Figures 5 and 6 show respectively the Taylor scales of the  $u$  and  $v$  fluctuations, in the  $x$  and  $z$  directions. The  $u$  fluctuations give rise to the well-known long velocity streaks, surrounded by smaller compact  $v$  objects. The Taylor scales of the wall-normal velocity fluctuations  $\lambda_{vx}^+$  and  $\lambda_{vz}^+$  (Figure 6) are roughly twice smaller as small as  $\lambda_{ux}^+$  and  $\lambda_{uz}^+$  and the  $v$ -level-crossing activity is larger by the same amount compared to the  $u$ -level crossings. Note also, the remarkable insensitivity of  $\lambda_{vx}^+$  and particularly of  $\lambda_{vz}^+$  to the Reynolds number in Figure 6. It is known that there is no large-scale organisation of the  $v$  component in a rough sense. The results reported in Figure 6 show further that there is no effect of the large-scale passive eddies on the intermediate wall-normal velocity length scales.

Special care is needed in the analysis of the Palm statistics to ensure the statistical convergence at large thresholds. Since the level-crossing frequency is proportional to the probability density  $f_l \propto p(u = \ell)$ , the number of events decreases drastically at large thresholds  $\ell$  roughly as  $e^{-\ell^2/2}$ . The results presented in this paper are restricted to the range of the thresholds  $\ell_{u_i}$  in such a way that the minimum number of samples entering into the statistics is larger than  $N_s = 10^5$ . The number of samples for a given  $\ell$  is generally larger for the  $v$  than the  $u$ -level crossings, but we keep the same threshold ranges in the related figures on a consistent basis.

#### 4.2. Comparison of biased and unbiased statistics

The coupling between the velocity component  $u_i$  and the absolute  $|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}|$  gradient at prescribed  $u_j$  crossings is generally non-negligible. Figure 7 compares the biased and unbiased production conditioned by the wall-normal velocity level crossings at  $y^+ = 12$  and  $Re_\tau = 1100$ . To be specific, the correct unbiased production, along, for example, spanwise  $v$  crossings is

$$\bar{P}_\ell = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \ell_v \sigma_v \frac{E\left\{u \mid \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right| \mid v = \ell_v \sigma_v\right\}}{E\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right| \mid v = \ell_v \sigma_v\right\}}. \quad (13)$$

It differs from the biased (incorrect) mean

$$\bar{P}_{\ell b} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \ell_v \sigma_v E\{u \mid v = \ell_v \sigma_v\}, \quad (14)$$

if there is a non-negligible correlation between the absolute gradient  $|\frac{\partial v}{\partial z}|$  and  $u$ . It is seen in Figure 7 that the biased mean at positive spanwise level crossings  $\ell_v \geq 0$  is larger than  $\bar{P}_\ell$  by about 40%, suggesting that  $P$  and  $|\partial v / \partial z|$  are negatively correlated according to Equation (7). The close analysis of the ensemble of biased and unbiased statistics revealed

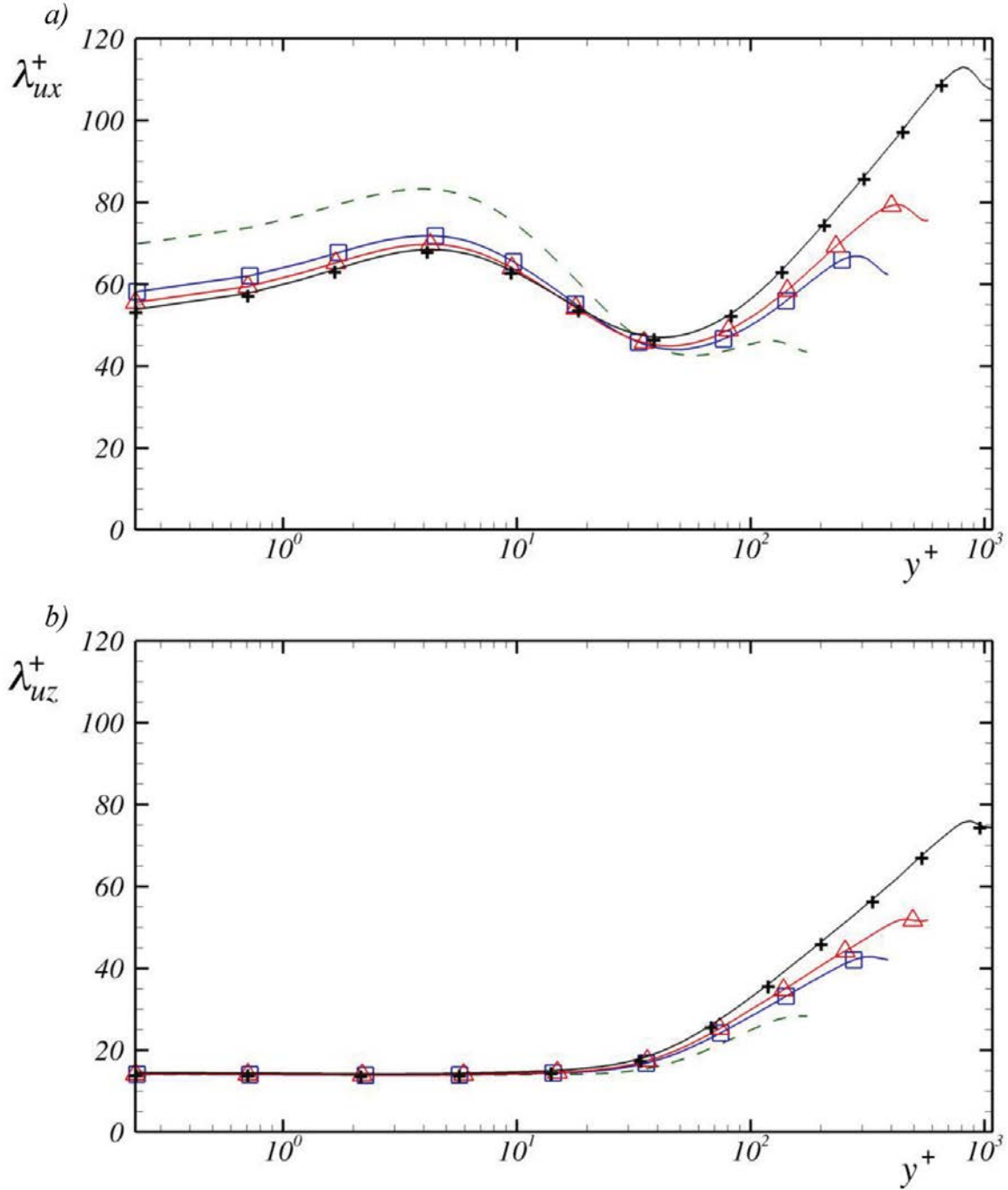


Figure 5. Taylor scale associated with the streamwise velocity fluctuations in the streamwise (a) and spanwise (b) directions at different Reynolds numbers versus the distance normal to the wall. For legend, see Figure 2.

that the statistical dependence between  $P$  and the gradients  $|\vec{\nabla}u|$  and  $|\vec{\nabla}v|$  can clearly not be disregarded. For these reasons, and adopting a unified approach, we only present and discuss the unbiased Palm statistics at contour crossings hereafter.

#### 4.3. Palm production statistics in the inner layer

The low buffer layer is under the dominating influence of the Reynolds shear stress producing quasi-streamwise vortices (QSV). The intense and intermittent  $u$  and  $v$  induced by the

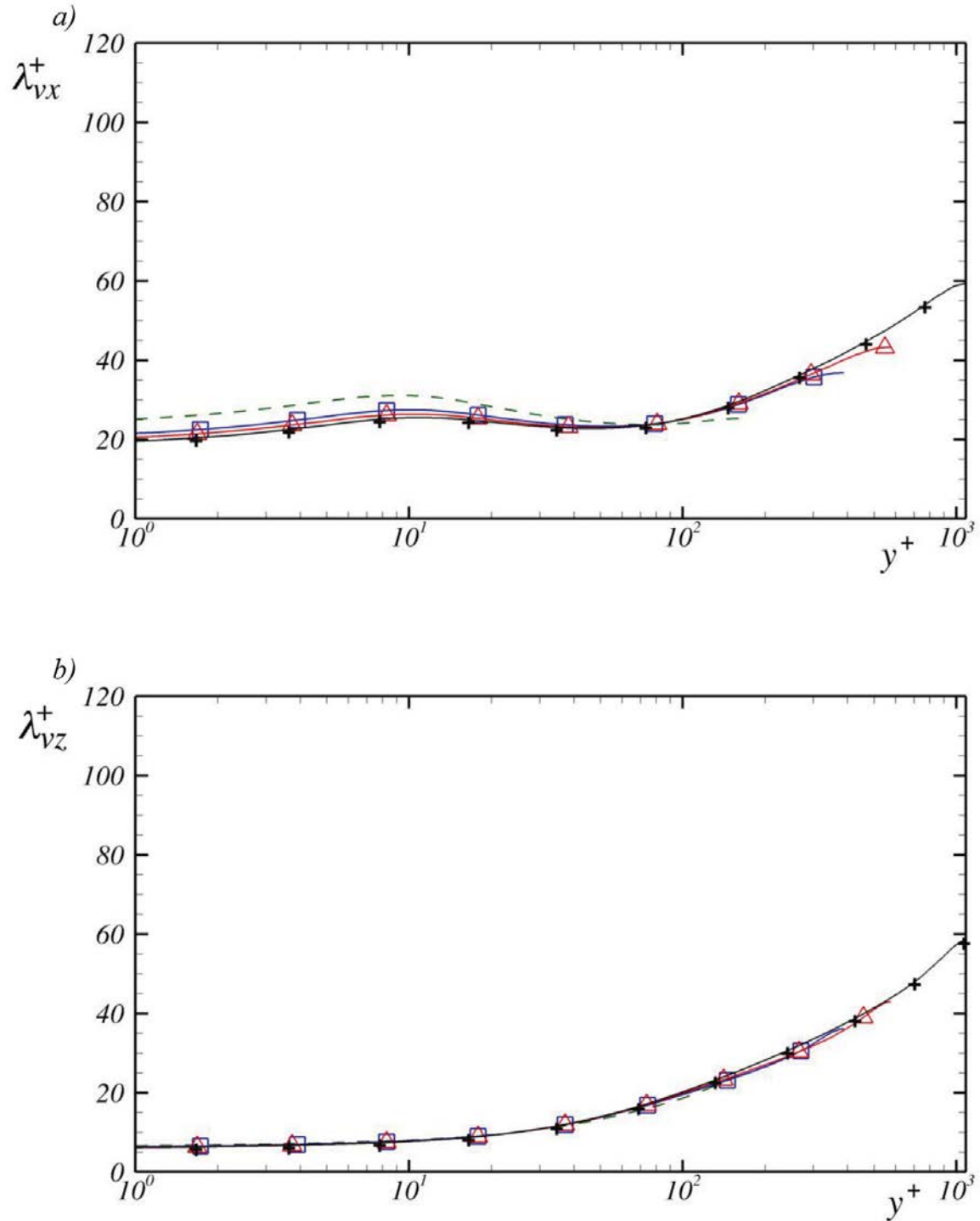


Figure 6. Taylor scale associated with the wall-normal velocity fluctuations in the streamwise (a) and spanwise (b) directions at different Reynolds numbers versus the distance normal to the wall. For legend, see Figure 2.

coherent structures directly affect the production process at the edge of the viscous sublayer. Figure 8(a) shows the distribution of the production  $\bar{P}_{\ell_u}$  conditioned by the  $u$  crossings and scaled by the local mean  $\bar{P}$  versus the threshold  $\ell_u$  at  $y^+ = 5$ . Note first that the  $\frac{\bar{P}_{\ell_u}}{\bar{P}}$  profiles is significantly asymmetric with respect to the threshold  $\ell_u$  and is far being Gaussian. The joint normality is the simplest reference statistical model. It is not expected to hold in the viscous and buffer layers, at least because of the strongly non-Gaussian characters of



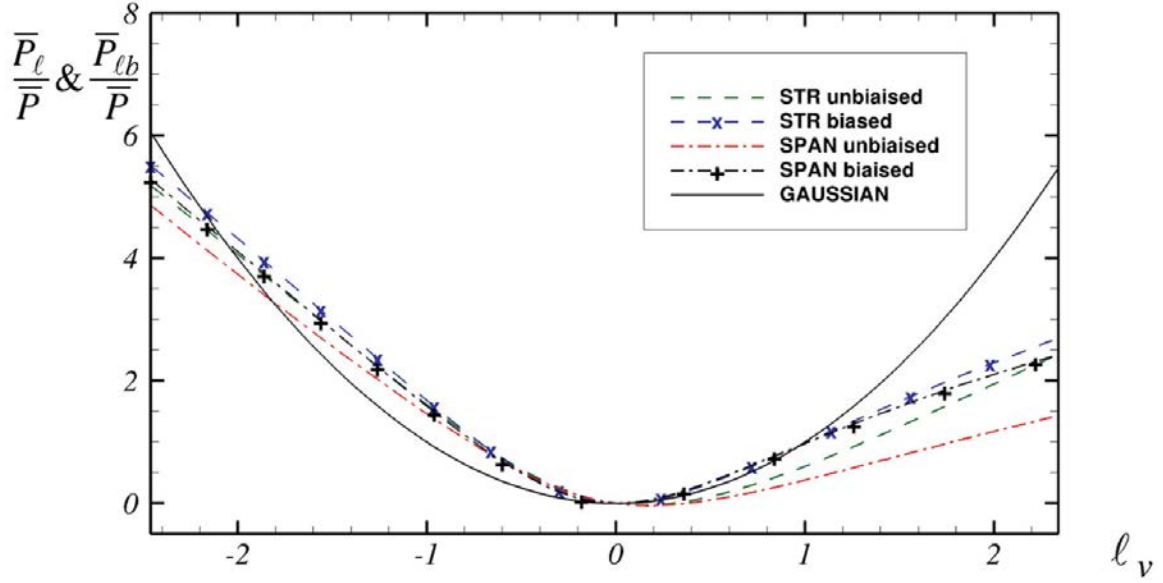


Figure 7. Biased and unbiased production at directional wall-normal velocity crossings in the median buffer layer at  $y^+ = 12$  and  $Re_\tau = 1100$ .

$u$  and  $v$  in these regions. Strong contributions of the ejections or of the quadrant  $Q_{II}$  events ( $v > 0$ ,  $u < 0$ ) make  $\frac{\bar{P}_{\ell_u}}{\bar{P}}$  over Gaussian at the  $\ell_u < 0$  side, pointing at the preponderance of the interaction of intense  $u < 0$  with  $v > 0$ . The striking feature of the results presented in Figure 8(a) is that, at the positive  $\ell_u > 0$  crossings, the mean production is curiously *negative* within the range  $0 < \ell_u < 1.5$  and stays weak at larger thresholds compared to the  $\ell_u < 0$  side. The only categories of events that can induce *noise contamination* and render  $\bar{P}_{\ell_u}$  negative when  $u > 0$  are the  $Q_I$  interactions ( $u > 0$ ,  $v > 0$ ). The  $Q_I$  events induce incoherence at the edge of the viscous sublayer and render blurred sweeps marked by the  $u$ -crossings.

Figure 8(b) that shows  $\frac{\bar{P}_{\ell_v}}{\bar{P}}$  determined at wall-normal velocity crossings at  $y^+ = 5$  supports this interpretation. This time  $\bar{P}_{\ell_v}/\bar{P}$  is negative at the ejection  $v > 0$  contour crossings, again because of the  $Q_I$  events contamination. The sweeps ( $Q_{IV}$ ), on the other hand, are strongly marked by  $v$ -crossings ( $v < 0$ ,  $u > 0$ ) and  $\bar{P}_{\ell_v}/\bar{P}$  is over Gaussian at  $\ell_v < 0$ . The sweeps are indeed known to contribute more to the shear stress  $-\overline{uv}$  in the viscous sublayer than the ejections by roughly 40%. [36] In summary, the ejections and the sweeps are respectively marked by the  $u < 0$  and  $v < 0$  crossings in the viscous sublayer wherein the  $Q_I$  incoherent interactions play an important role. It is, for instance, not possible to detect both events at  $y^+ < 5$  by using a single probe that measures either  $u$  or  $v$  time series.

The  $\frac{\bar{P}_{\ell_{ui}}}{\bar{P}}$  distributions at  $u$  and  $v$  crossings are not similar and there is no reason for it to be so. Remember that the conditional expected value  $(\overline{u_j})_{\ell_{ui}}$  appearing in (9) depends on the conditional probability distribution  $p(u_j|u_i)$ . The conditional densities  $p(v|u)$  and  $p(u|v)$  are connected by the Bayes theorem  $p(v|u) = \frac{p(u|v)p(v)}{p(u)}$  and the wall-normal velocity is highly intermittent near the wall.

The  $\bar{P}_{\ell_u}/\bar{P}$  distribution is always over Gaussian at  $u < 0$  contour crossings confirming the consensus that the ejections dominate the production at  $y^+ > 12$  (Figure 7). Large dissymmetry with respect to the positive and negative thresholds persists beyond the buffer layer as at  $y^+ = 50$  shown in Figure 9. There is a clear Reynolds number dependence in the  $\frac{\bar{P}_{\ell_{ui}}}{\bar{P}}$  distributions. Note that the Reynolds number effects appearing in the normalised

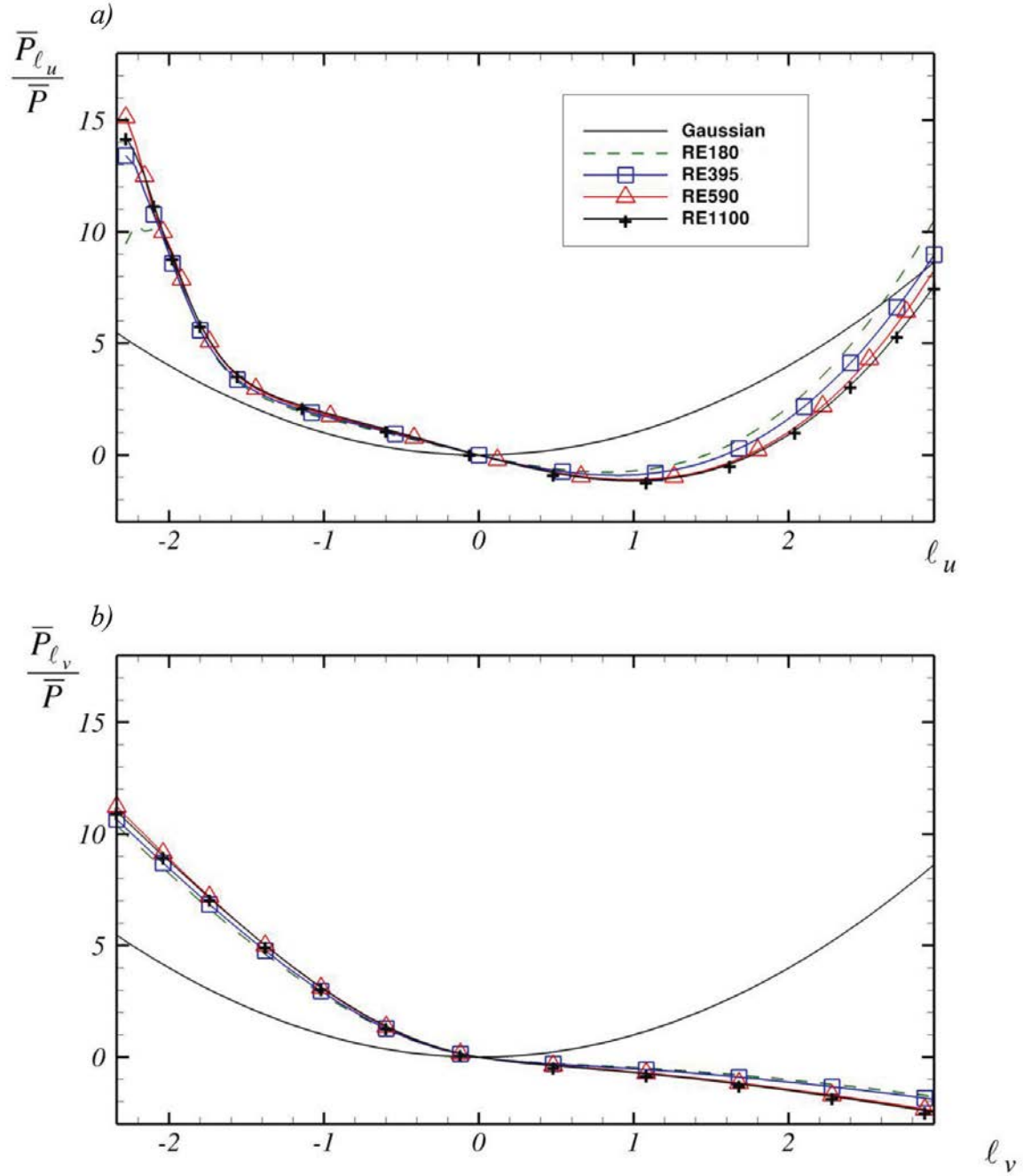


Figure 8. Unbiased mean production at the edge of the viscous sublayer  $y^+ = 5$  at  $u$  (a) and  $v$  (b) contour crossings.

conditional production  $\frac{\bar{P}_{\ell_{u_i}}}{\bar{P}} = \frac{\sigma_{u_i}}{-\bar{u}_i \bar{u}_j} (\bar{u}_j)_{\ell_{u_i}} \ell_{u_i}$  may come from different sources, first directly from the alteration of the conditional averages  $(\bar{u}_j)_{\ell_{u_i}}$ , but also from  $\frac{\sigma_{u_i}}{-\bar{u}_i \bar{u}_j}$ . That is why, we will focus directly on the scaling of the conditional ensemble averaged velocity components  $(\bar{u}_j)_{\ell_{u_i}}$  hereafter.

The conditional averages  $(\bar{u}_j)_{\ell_{u_i}}$  do not scale with inner ( $\bar{u}_\tau$ ), outer ( $U_c$ ) or mixed ( $\sqrt{\bar{u}_\tau U_c}$ ) variables in the wall layer defined here as the zone delimited by  $y^+ < 100$ . Figure 10 shows the distributions of the Palm mean of the wall-normal velocity  $(\bar{v})_{\ell_u}^+ = (\bar{v})_{\ell_u} / \bar{u}_\tau$  in wall variables at  $y^+ = 12$  where the mean production reaches its maximum. A clear Reynolds number dependence is perceptible in this figure. The  $Re_\tau$  effect on  $(\bar{v})_{\ell_u}^+$



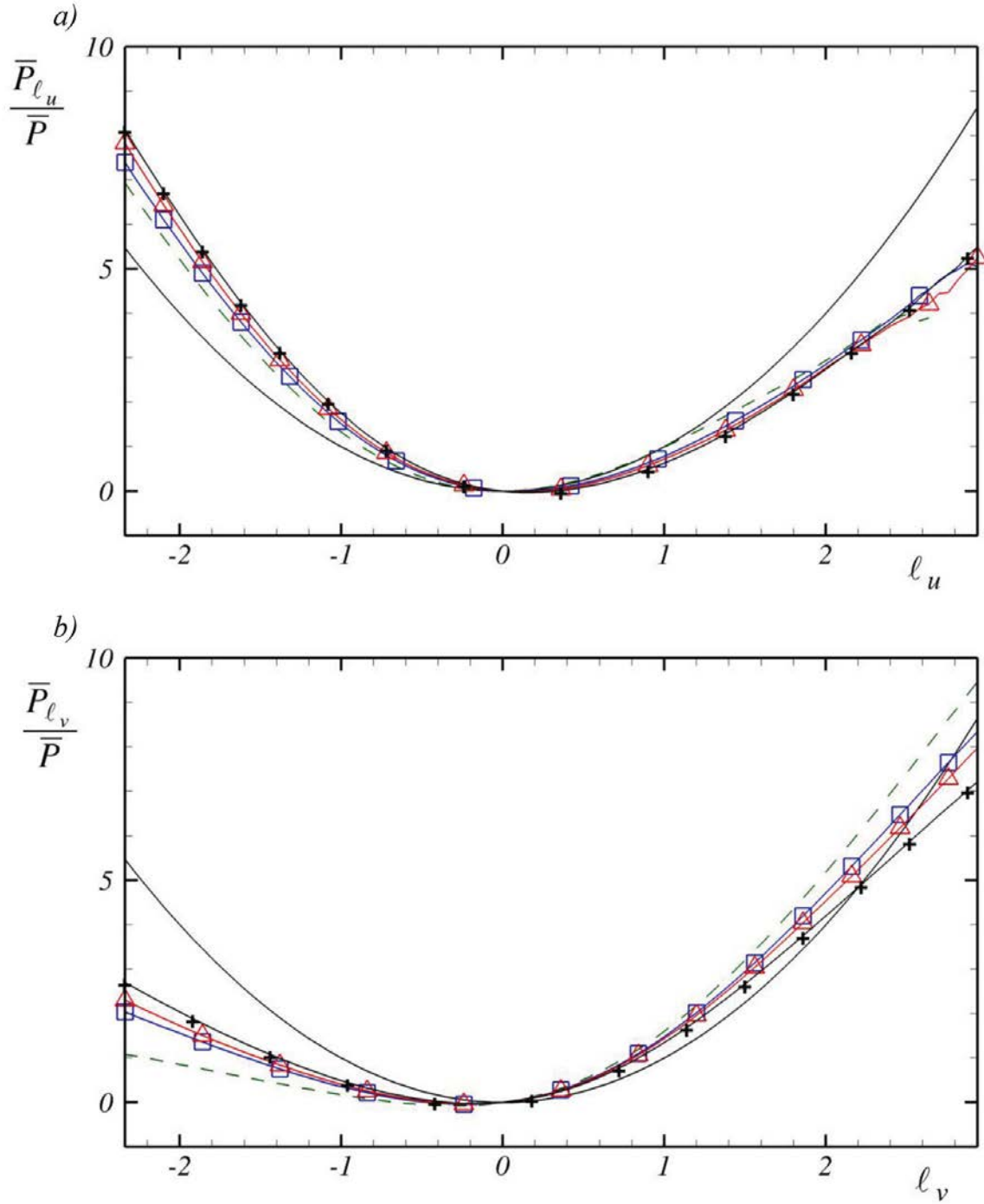


Figure 9. Unbiased mean production at the edge of the wall layer  $y^+ = 50$  at  $u$  (a) and  $v$  (b) contour crossings. For legend see Figure 8.

is felt primarily in the range  $-2 \leq \ell_u \leq 1$ , while the curves at different Reynolds number collapse relatively well at large intermittent  $\ell_u$  thresholds. It has to be emphasised here that there is no intrinsic length scale information in the Palm statistics. Yet, the large intermittent  $\ell_u$  contours are merely small-scale events. The intermittent contour crossings at typically  $|\ell_{u_i}| > 4$  are almost locally isotropic with streamwise and spanwise length scales of about  $2\Delta x^+$  and  $\Delta z^+$  beyond which they cannot be resolved in the present simulations. It is therefore not surprising that  $(\overline{v})_{\ell_u}$  tends to scale with inner variables at large thresholds. In

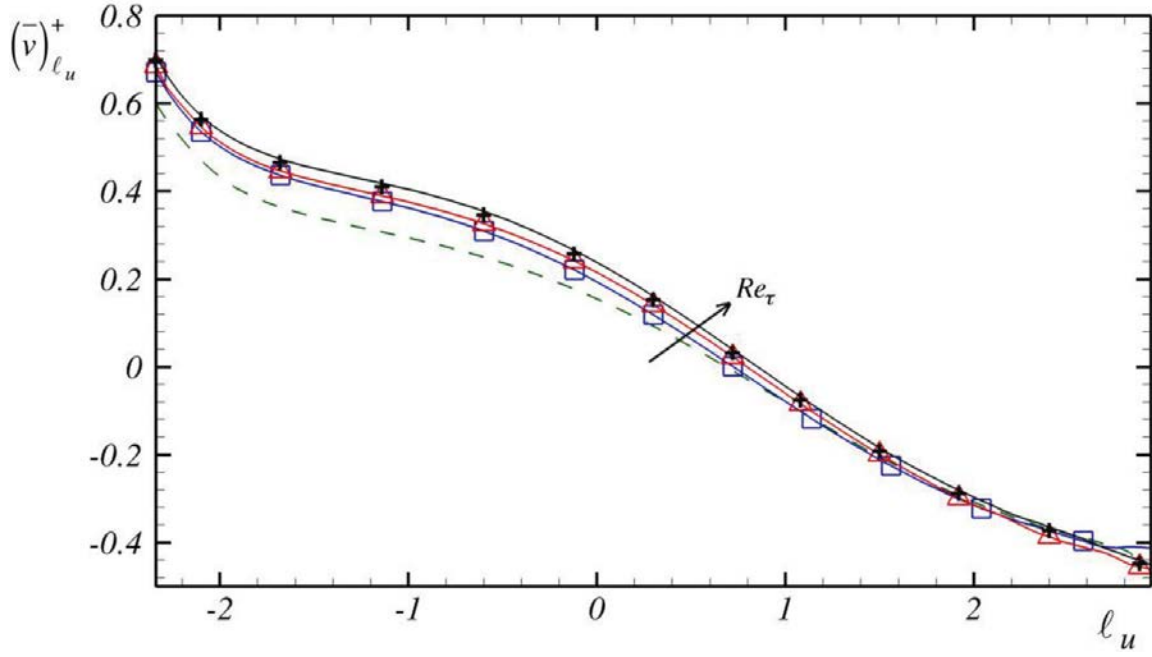


Figure 10. Unbiased mean wall-normal velocity in wall units conditioned by streamwise velocity contour crossings at  $y^+ = 12$ . See Figure 8 for legend.

the medium  $\ell_u$  range, however the Reynolds number dependence of  $(\bar{v})_{\ell_u}^+$  dictated by outer passive eddies can undoubtedly not be ignored.

Suppose that the streamwise velocity component can be split in two independent components, an active  $u_A$  and passive  $u_P$  part. The form of the splitting is not important for the moment. The passive component contributes to  $\overline{uu}$ ,  $\overline{ww}$  [37] and marginally to  $\overline{vv}$  [28] in the constant shear layer but not to the shear stress  $-\overline{uv}$  with  $-\overline{u_P v} = 0$ . Consider the biased mean  $E(v|u = \ell)$  (and not the unbiased mean) to simplify. According to the Chapman–Kolmogorov relationship one can write

$$E^+(v^+|u^+) = \int_{-\infty}^{\infty} E^+(v^+|u_A^+, u^+) p^+(u_A^+|u^+) du_A^+. \quad (15)$$

All the quantities are scaled with inner variables in (15). The integrand appearing at the right-hand side has to be interpreted carefully. In the expression  $E^+(v^+|u_A^+, u^+)$ , the active component is fixed to an assigned threshold. Since  $v$  does not depend on  $u_P$ , the expected average  $E^+(v^+|u_A^+, u^+)$  remains unchanged regardless  $u_P^+$  and consequently regardless  $u^+$ . Therefore,

$$E^+(v^+|u_A^+, u^+) = E^+(v^+|u_A^+)$$

leading to

$$E^+(v^+|u^+) = \int_{-\infty}^{\infty} E^+(v^+|u_A^+) p^+(u_A^+|u^+) du_A^+. \quad (16)$$

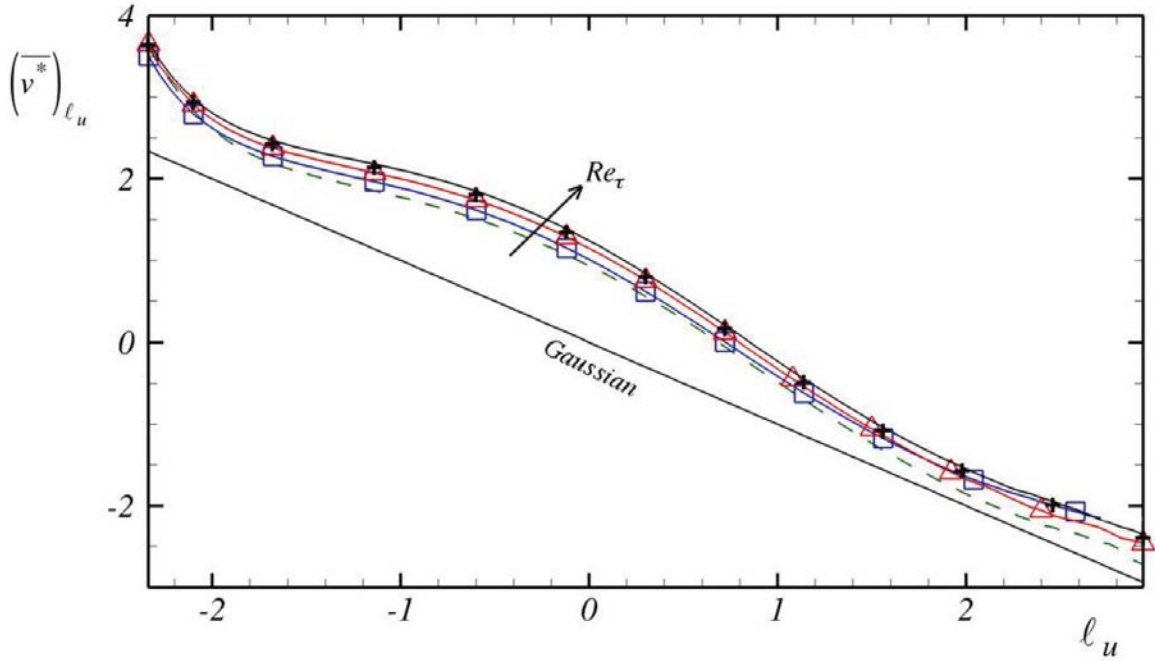


Figure 11. Unbiased mean wall-normal velocity scaled by its related Gaussian value  $C_{-uv}\sigma_v$  at  $y^+ = 12$ . See Figure 8 for legend.

The expected value in wall variables  $E^+(v|u_A) = F(y^+, u_A^+)$  is  $Re_\tau$  independent, while the conditional density  $p^+(u_A^+|u^+)$  is responsible for the Reynolds number effects that are clearly depicted in Figure 10.

The existing models that express the streamwise velocity as a function of active and passive components are only developed to give adequate results on a statistical basis. Panton [38] decomposed the streamwise velocity into an active and passive part  $u(\vec{x}; t) = u_A(\vec{x}; t) + u_P(\vec{x}; t)$ . The mean value  $\bar{u} = 0$ , but not necessarily  $\bar{u}_A$  and  $\bar{u}_P$ . In other words,  $\bar{u}_A = -\bar{u}_P \neq 0$ . Passive structures influence  $\overline{uu}$  but not  $-\overline{uv}$ . Consequently,  $-\overline{uv} = -\bar{u}_A\bar{v}$ . The active and passive structures are uncorrelated implying that  $\overline{u_A u_P} = \bar{u}_A \bar{u}_P = -\bar{u}_A^2$ . Pantan [3830] subsequently used DNS data and established an empirical  $\overline{u_P u_P}^*$  distribution that matches the experiments reasonably well. The model also predicts quite well the increase  $(\overline{uu})_{\max} \propto \ln(Re_\tau)$  of the maximum turbulent intensity near the wall, as indicated in [31]. The large-scale outer passive eddies not only add to the active motions but modulate the active part at the same time according to [27]. The Marusic model suggests that a ‘universal’ velocity component  $u^{*+}(y^+; t^+)$  obtained in the inner layer by removing both the modulation and additive effects of the outer structures can be used in any flow to predict  $u^+(y^+; t^+)$ . The inner layer is defined as  $0 \leq y^+ \leq y_{CLog}^+$ , where  $y_{CLog}^+ = 3.9 Re_\tau^{1/2}$  is the centre of the logarithmic layer. The predicted streamwise in velocity within  $0 \leq y^+ \leq y_{CLog}^+$  is given by

$$\hat{u}^+(y^+; t^+) = u^{*+}(y^+; t^+)(1 + \beta_m u_O^+(y_{CLog}^+; t^+)) + \beta_a u_O^+(y_{CLog}^+; t^+), \quad (17)$$

where  $u_O^+(y_{CLog}^+; t^+)$  is the velocity component measured at the centreline of the logarithmic layer and represents the effect of the outer large-scale eddies that add and modulate  $u^+$  through the constants  $\beta_a$  and  $\beta_m$ . This model differs from Pantan’s additive decomposition in which the passive and active components are local. The predicted streamwise velocity in

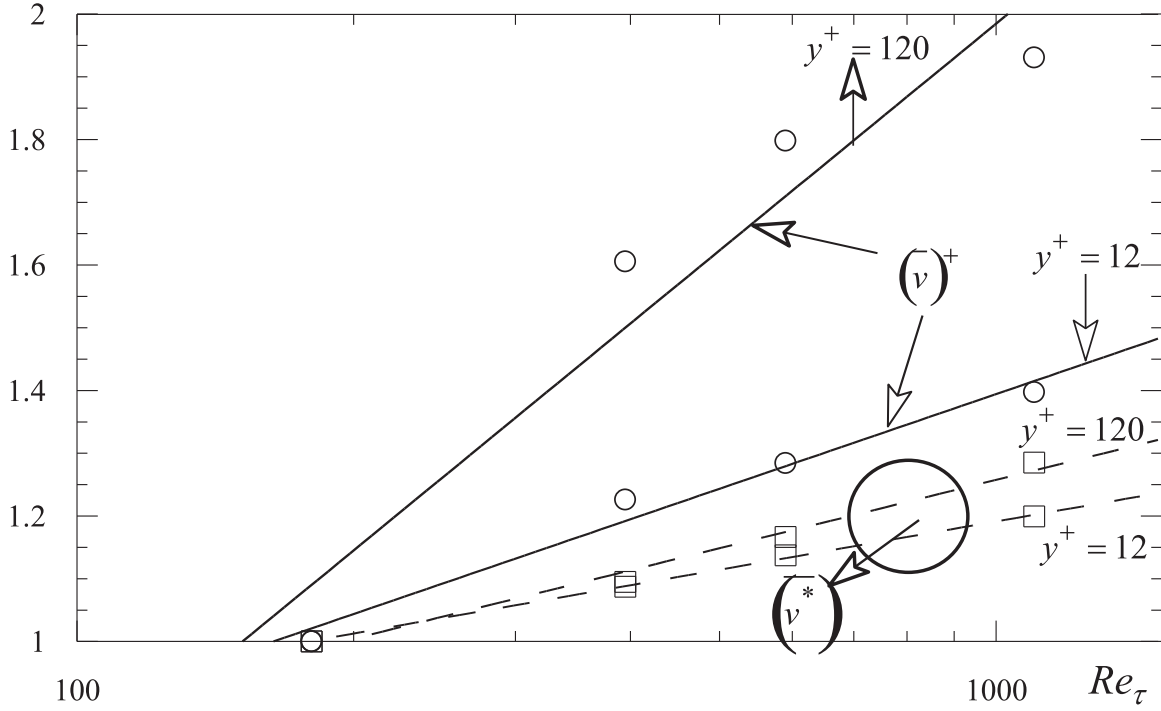


Figure 12. Conditional wall-normal velocity  $(\bar{v})_{\ell_u}^+$  scaled by  $\bar{u}_\tau$  and non-dimensionalised by  $\frac{1}{C_{-uv}\sigma_v}$  denoted by  $(\bar{v}^*)_{\ell_u}$  versus the Reynolds number at fixed  $\ell_u = -1$ . Typical Reynolds number variations are  $(\bar{v})_{-1}^+ \propto 0.22 \ln(Re_\tau)$  and  $(\bar{v})_{-1}^+ \propto 0.5 \ln(Re_\tau)$  at  $y^+ = 12$  and  $y^+ = 120$ , respectively. The Reynolds number dependence in  $(\bar{v}^*)_{\ell_u}$  is milder with  $(\bar{v}^*)_{-1} \propto 0.11 \ln(Re_\tau)$  and  $(\bar{v}^*)_{-1} \propto 0.15 \ln(Re_\tau)$  at the same  $y^+$  locations.

(17) is used to generate the statistics but does not reproduce the random velocity  $u^+(y^+; t^+)$ . It is possible to show through lengthy but simple calculations (see the Appendix 3) that the Marusic model (17) leads exactly to the Gaussian distribution  $\frac{\bar{P}_{LG}}{\bar{P}} = \ell^2$  under the strong hypothesis of joint Gaussianity between  $(v, u^*)$  and  $(u^*, u)$ . The mean value of the active component is not a priori  $\bar{u}_A = 0$  in Pantón's model, yet the latter predicts also a  $\bar{P}_{\ell_b}/\bar{P} \propto \ell^2$  behaviour under similar hypothesis. The latter are however too simplistic and the real situation is more complex. The results discussed before showed clearly that the Gaussianity is never exactly established in the production Palm statistics in the inner layer. One has

$$E(u_i | u_j = \ell_{u_j} \sigma_{u_j}) = -C_{-u_i u_j} \sigma_{u_i} \ell_{u_j} \quad (18)$$

in the simple case of jointly Gaussian signals, where the correlation coefficient  $C_{-u_i u_j}$  is  $C_{-u_i u_j} = \frac{-\bar{u_i u_j}}{\sigma_{u_i} \sigma_{u_j}}$ . Thus, if  $u_i$  and  $u_j$  were jointly normal, the expected biased means of the normalised variables  $u_i^* = \frac{u_i}{C_{-u_i u_j} \sigma_{u_i}}$  would be independent of both  $y^+$  and the Reynolds number. The unbiased mean at level crossings would then be a linear function of the threshold with  $(\bar{u}_i^*)_{\ell_{u_j} G} = -\ell_{u_j}$ . Figure 11 takes the data of Figure 10 again, this time in the form of the unbiased conditional mean  $(\bar{v}^*)_{\ell_u} = \frac{1}{C_{-uv} \sigma_v} (\bar{v})_{\ell_u}$  scaled by the Gaussian value  $C_{-uv} \sigma_v$ . The disparity between the  $(\bar{v}^*)_{\ell_u}$  distributions and the Gaussian relation  $(\bar{v}^*)_{\ell_u G} = -\ell_u$  is again clear, with a consistent but somewhat attenuated Reynolds number dependence.

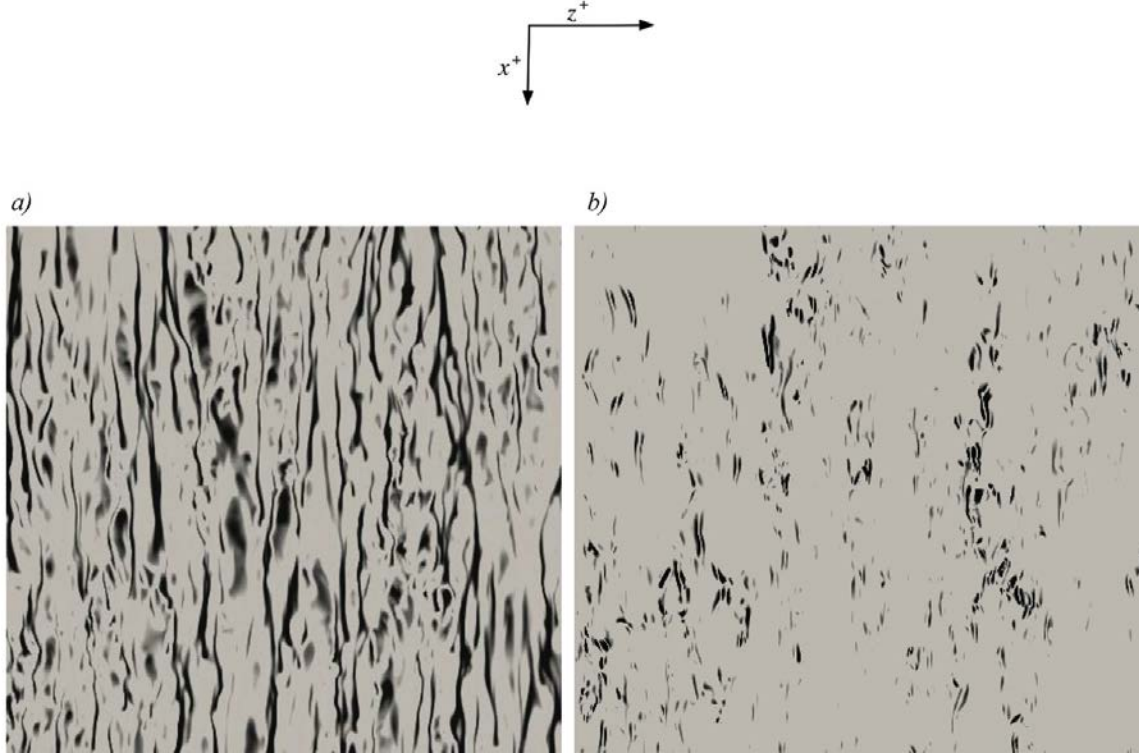


Figure 13. Contours of the streamwise (a) and wall-normal velocity (b), at  $y^+ = 12$  and  $Re_\tau = 1100$ . The quantities are taken at their respective mean square values. The dimensions of the selection are, respectively, 2700 and 2870 inner variables in the streamwise and spanwise directions.

The conditional averages  $(\overline{u_j})_{\ell_{u_i}}^+$  scaled in wall variables varies from one  $y^+$  position to another, typically as  $\sigma_{u_j}^+(y^+)$ . The scaling  $(\overline{u_i^*})_{\ell_{u_j}}$  obtained through local structural functions  $\frac{1}{C_{-u_i u_j} \sigma_{u_i}}$  attenuates considerably these variations. Yet, the Reynolds number dependence is still present in the Palm statistics expressed in the form  $(\overline{u_i^*})_{\ell_{u_j}}$ . Figure 12 shows the distributions of the Palm mean of the wall-normal velocity  $(\overline{v})_{\ell_u}^+$  scaled by the inner variables and of  $(\overline{v^*})_{\ell_u}$  normalised by  $\frac{1}{C_{-uv} \sigma_v}$ , at  $y^+ = 12$ , versus the Reynolds number for the fixed threshold  $\ell_u = -1$ . It is seen that  $(\overline{v})_{-1}^+ \propto 0.22 \ln(Re_\tau)$ , and that the scaling through the local Gaussian value  $\frac{1}{C_{-uv} \sigma_v}$  reduces but does not entirely suppress the Reynolds number dependence in  $(\overline{v^*})_{-1}$  which varies like  $(\overline{v^*})_{-1} \propto 0.11 \ln(Re_\tau)$ . Similar results have been obtained for the  $v$ -level-crossings Palm statistics  $(\overline{u})_{\ell_v}^+$  and  $(\overline{u^*})_{\ell_v}$ . These variations are more subtle compared, for instance, to the maximum streamwise turbulent intensity that also scales with  $\ln(Re_\tau)$  as  $\sigma_u^{+2} \propto 0.97 \ln(Re_\tau)$ . [30] Beyond the wall layer however, and as expected, the effect of the large-scale outer eddies becomes more significant. For instance, at  $y^+ = 120$ , the inner-scaled conditional wall-normal velocity is  $(\overline{v})_{-1}^+ \propto 0.5 \ln(Re_\tau)$  as seen in Figure 12. The scaling through the structural function  $\frac{1}{C_{-u_i u_j} \sigma_{u_i}}$  again reduces the Reynolds number dependence in this zone, without however suppressing it and one has  $(\overline{v^*})_{-1} \propto 0.15 \ln(Re_\tau)$  at  $y^+ = 120$ .

The inner sublayer  $y^+ < 100$  is essentially governed by the wall parameters  $\nu$  and  $\bar{u}_\tau$ . The numerical experiments conducted by Jiménez et al. [39] in which the fluctuations in vorticity from the outer sublayer were artificially removed, showed that the structure of

the inner sublayer is robust and only has a marginal dependence on the large-scale structures originating in the outer flow. The outer structures affect to a very limited extent the spatial scales characteristic of the wall-normal fluctuations and there is no large-scale organisation of  $v$  at least in a rough sense. The fluctuations of  $v$  are governed by the QSV: the streamwise length scale of  $v$  is the length of the QSVs, which typically ranges from  $L_{xv}^+ = 300$  to  $L_{xv}^+ = 500$ , whilst the spanwise characteristic scale is the diameter of the vortices, i.e.  $L_{zv}^+ = 30$ . Figure 13 confirms these arguments, and shows that there is a clear dissimilarity of scale between  $u$  and  $v$  at  $y^+ = 12$ . The local fluctuations in  $v$  adopt a satellite-like arrangement around the long streaks of  $u$  and give rise to a telegraphic succession of zones of Reynolds shear stress. The streaks with large scales  $L_{xu}$  transport  $-uv$ , but the production remains globally a local phenomenon in the inner layer. We are actually investigating the effect of the outer passive eddies on the Palm statistics  $(\bar{u}_i^*)_{\ell_{u_j}}$  through low-pass filtered  $u$  signals. The first results we obtained indicate that the structures responsible for the Reynolds number dependence have significantly long streamwise lengths, varying between  $L_{xu}^+ \geq 5 \times 10^3$  to  $L_{xu}^+ \geq 2 \times 10^3$  in the zone  $y^+ < 50$ , depending on whether  $v$  or  $u$  level crossings are considered. Expressed in a different way, the structures as long as  $L_{xu}^+ = 5 \times 10^3$  for the  $v$ -level crossings and  $L_{xu}^+ = 2 \times 10^3$  for the  $u$ -level crossings lead to universal Reynolds number independent Palm statistics in the wall layer. Beyond the wall layer, the coherence length  $L_{xu}$  scales with the outer variable as  $L_{xu} = 3h$ , which is nothing but the upper bound of the streamwise extend of the packets of coherent vortices, or the large-scale motions.[40,41] These results, once completed, will be published elsewhere.

## 5. Conclusion

The main topic of this paper is the analysis and adequate formulation of the Palm statistics of a flow quantity as conditioned by another one, with the specific application to the production process in wall-bounded flows. Such analyses are common but not always conducted in an appropriate way by our community. We briefly reviewed existing literature on this topic in the first part of the paper. We showed for instance that the moments of order  $m$  of a quantity  $q$  conditioned by level crossings of the velocity component  $u_i$  in the direction  $x_j$  depends on the correlation between  $q^m$  and the absolute directional derivative  $|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|$ . The omission of this inter-relationship results in biased statistics. Existing studies deal with level crossings in wall turbulence process with velocity time series. Here, we consider the level crossings in space and introduce their different characterisations either along the prescribed directions or at closed contours.

The level-crossing activity is defined as the frequency of crossings of the velocity signals in an assigned direction and at a given threshold. The level-crossing frequency is reasonably well predicted by a Gaussian model and is roughly inversely proportional to the Taylor scale in the assigned direction. The Taylor scales in the spanwise direction  $z$  corresponding to both the streamwise  $u$  and wall-normal velocity  $v$  fluctuations are always smaller than in the streamwise direction  $x$ . Thus, the level-crossing activity is larger along  $z$  than along  $x$ . It is found, in addition, that the wall-normal velocity is more active than  $u$ .

The unbiased mean production  $\bar{P}_{\ell_{u_i}}$  conditioned by  $u$  and  $v$  crossings differs considerably from the Gaussian value obtained under the hypothesis of joint normality between  $u$  and  $v$ . The incoherent  $Q_I$  interactions ( $u > 0, v > 0$ ) contaminate and render subgaussian  $\bar{P}_{\ell_{u_i}}$  at respectively  $u > 0$  and  $v > 0$  crossings in the low buffer and viscous sublayers. On



the other hand, negative contour crossings of  $u$  and  $v$  are marked by significantly large local production  $\bar{P}_{\ell_{u_i}}$  in this layer. Large dissymmetry with respect to the positive and negative thresholds in the  $\bar{P}_{\ell_{u_i}}$  distributions persists beyond the buffer layer wherein Gaussianity in the sense defined above is hardly reached.

The expected means of  $u$  ( $v$ ) conditioned by the  $v$  ( $u$ ) level crossings do not scale with inner, outer or mixed scales. The Reynolds number dependence of these statistics scaled with the shear velocity is mild but persistent next to the wall and becomes progressively significant as one approaches the edge of the wall layer  $y^+ = 100$ . The scaling of the conditional expected means by the velocity scale that a Gaussian signal would have dampens the Reynolds number dependence to some degree but does not entirely suppress it. Deeper analysis that we are currently conducting through low-pass filtering of the fluctuating  $u$  component in the  $x$  direction revealed that very long structures of streamwise which extend up to  $5 \times 10^3$  wall units constitute universal Reynolds number independent features of the wall layer, in the sense of the Palm production characteristics. It is also found that the LSM (packets of vortices) constitute universal objects in the outer layer. These results will be published elsewhere.

### Acknowledgements

This work was granted access to the HPC resources of IDRIS under the allocation 100226 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

### Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

### References

- [1] Hoyas S, Jimenez J. Reynolds number effects on the Reynolds stress budgets in turbulent channels. *Phys Fluids*. 2008;20:101511.
- [2] Townsend AA. The structure of turbulent shear flow. Cambridge: Cambridge University Press; 1976.
- [3] Del Alamo JC, Jimenez J. Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Phys Fluids*. 2003;15(6):L41–L44.
- [4] Del Alamo JC, Jimenez J, Zandonade P, Moser RD. Scaling of the energy spectra of turbulent channels. *J Fluid Mech*. 2004;500:135–144.
- [5] Guala M, Hommema SE, Adrian RJ. Large-scale and very large scale motions in turbulent pipe flow. *J Fluid Mech*. 2006;554:521–542.
- [6] Wu X, Baltzer JR, Adrian RJ. Direct numerical simulation of a 30R long turbulent pipe flow at  $R^+ = 685$ : large and very large-scale motions. *J Fluid Mech*. 2012;698:235–281.
- [7] Baltzer JR, Adrian RJ, Wu X. Structural organization of large and very large scales in turbulent pipe flow simulation. *J Fluid Mech*. 2013;720:236–279.
- [8] Marusic I, Mathis R, Hutchins N. Predictive model for wall-bounded turbulent flow. *Science*. 2010;329:193–196.
- [9] Kline SJ, Reynolds WC, Scraub FA, Runstadler PW. The structure of turbulent boundary layers. *J Fluid Mech*. 1967;30:741–773.
- [10] Kim HT, Kline SJ, Reynolds WC. The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*. 1971;50:133–160.
- [11] Willmarth WW, Lu SS. Structure of the Reynolds shear stress near the wall, *J Fluid Mech*. 1972;55:65–92.
- [12] Tardu S. Transport and coherent structures in wall turbulence. London, UK: ISTE Ltd; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 2014.

- [13] Liepmann HW. Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen Stochastischer Funktionen und Turbulenzmessungen [Application of a theorem on the zeros of stochastic functions to turbulence measurements]. *Helv Phys Acta*. 1949;22:119–126.
- [14] Sreenivasan KR, Prabhu A, Narasimha R. Zero-crossings in turbulent signals. *J Fluid Mech*. 1983;137:251–272.
- [15] Tardu S. Detection and identification of near wall coherent structures through conditional sampling. In: Hopfinger E, Jansen J, Aubry N, editors. *Coherent structures: identification and modeling*. Kluwer Academic Publishers; 1999. p. 355–368.
- [16] Blake IF, Lindsey WC. Level-crossing problems for random processes. *IEEE Trans Inform Theory*. 1973;19(3):295–315.
- [17] Kailasnath P, Sreenivasan KR. Zero crossings of velocity fluctuations in turbulent boundary layers. *Phys Fluids*. 1993;5(11):2879–2885.
- [18] Chacin JM, Cantwell BJ. Dynamics of a low Reynolds number turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*. 2000;404:87–115.
- [19] Chakraborty P, Balachandar S, Adrian RJ. On the relationships between local vortex identification schemes. *J Fluid Mech*. 2005;535:189–214.
- [20] Rice SO. Mathematical analysis of random noise. *Bell Syst Tech J (Bell Labs)*. 1945;24(1):46–156.
- [21] Papoulis A. *Probability, random variables and stochastic processes*. New York, NY: McGraw-Hill; 1984.
- [22] Geman D, Horowitz J. Occupation times for smooth stationary processes. *Ann Prob*. 1973;1:131–137.
- [23] Leadbetter MR, Spaniolo GV. On statistics at level crossings by a stationary process. *Statistica Neerlandica*. 2002;56(2):152–164.
- [24] Leadbetter MR, Spaniolo GV. Reflections on Rice's formulae for level crossings- History, extensions and use. *Aust N Z J Stat*. 2004;46(1):173–180.
- [25] Hoyas S, Jiménez J. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Phys Fluids*. 2006;18:011702.
- [26] Bauer F, Tardu S, Doche O. Efficiency of high order DRP schemes in direct numerical simulations of incompressible turbulent flows. *Comput Fluids*. 2015;107: 123–140.
- [27] Mathis R, Hutchins N, Marusic I. Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers. *J Fluid Mech*. 2009;628:311–337.
- [28] Morrison J. The interaction between the inner and outer regions of turbulent wall bounded flow. *Phil Trans R Soc A*. 2007;365(1852):683.
- [29] Marusic I, Monty JP, Hultmark M, Smits AJ. On the logarithmic region in wall turbulence. *J Fluid Mech*. 2013;716:R3, 1–11.
- [30] Hutchins N, Marusic I. Large scale influences in near wall turbulence. *Philosophical Trans A*. 2007;365:647–664.
- [31] Tardu S. *Statistical approach to wall turbulence*. London, UK: ISTE Ltd; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2011.
- [32] Wosnik W, Castillo L, George WK. A theory for turbulent pipe and channel flows. *J Fluid Mech*. 2000;421:115–145.
- [33] Lu SS, Willmarth WW. Measurement of the structure of the Reynolds shear stress in a turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*. 1973;60:481–511.
- [34] Sreenivasan KR, Chambers AJ, Antonia RA. Accuracy of moments of velocity and scalar fluctuations in an atmospheric boundary layer. *Boundary Layer Meteorol*. 1978;14:341–359.
- [35] Zähle U. A general Rice formula, palm measures and horizontal-window conditioning for random fields. *Stochastic Processes Appl*. 1984;17:265–283.
- [36] Kim, J, Moin P, Moser RD. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds numbers. *J Fluid Mech*. 1987;177:133–166.
- [37] Perry AE, Henbest S, Chong MS. A theoretical and experimental study of wall turbulence. *J Fluid Mech*. 1986;165:163–199.
- [38] Panton RL. Composite asymptotic expansions and scaling wall turbulence. *Phil Trans R Soc A*. 2007;365:733–754.
- [39] Jimenez J, Del Alamo JC, Flores O. The large-scale dynamics of near wall turbulence. *J Fluid Mech*. 2004;505:179–199.
- [40] Adrian RJ, Meinhart CD, Tomkins CD. Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*. 2000;422:1–54.
- [41] Tardu S. Characteristics of single and clusters of bursting events in the inner region of a turbulent channel flow; Part 2: level crossing events. *Exp Fluids*. 2002;33:640–652.



## Appendix 1

### *Palm distributions and generalised Rice formula*

Let the level crossings of the process  $u$  at a level  $\ell$  be marked by another process  $q$ . Let  $N(\ell, q^*)$  denote the number of level crossings for which  $q \leq q^*$ . Then, from an ergodic point of view, the ratio of the expected number  $E(N(\ell, q^*))$  to total  $E(N(\ell))$  is the cumulative distribution  $F(q^*)$  of  $q$  at level crossings, called the Palm distribution in the literature.[22], [23] Given the joint probability density  $p(u, u', q)$  the continuous density of the Palm distribution at  $u = \ell$  is

$$p_\ell(q) = \gamma \int_0^{+\infty} |u'| p(\ell, u', q) du', \quad (\text{A1})$$

where it is recalled that  $u'$  is the derivative of the signal and  $\gamma^{-1} = \int_0^{+\infty} |u'| \int_{-\infty}^{+\infty} p(q, u', \ell) dq du'$  is a normalising factor of the density. It is assumed that the processes are jointly stationary and absolutely continuous. The expected mean  $\bar{q}_\ell$  is directly derived from the probability distribution function  $p_\ell(q)$  as

$$\bar{q}_\ell = \int_{-\infty}^{+\infty} q p_\ell(q) dq = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u'| q p(q, u', \ell) du' dq. \quad (\text{A2})$$

By making use of conditional probability density functions  $p(q, u', u) = p(u) p(q, u'|u = \ell)$ , and  $p(u', u) = p(u) p(u'|u = \ell)$  one finally obtains

$$\bar{q}_\ell = \frac{E\{q |u'| \mid u = \ell\}}{E\{|u'| \mid u = \ell\}}. \quad (\text{A3})$$

The statistics of the derivative  $u'$  at level crossings of  $u$  can be deduced in a similar way. According to [23], the density  $p$  of  $u'$  is given by

$$p_\ell(u') = \gamma |u'| p(u', \ell), \quad (\text{A4})$$

where the normalising constant is now  $\gamma^{-1}(\ell) = \int_0^{+\infty} |u'| p(u', \ell) du'$ . It is interesting to derive results for a Gaussian signal that lead to the well-known equivalence between the Liepmann and Taylor scales and give reasonably good results in wall turbulence [14]. Suppose that  $u$  is a normal signal. Then,  $p(u', u) = p(u')p(u)$  and  $p(u') = \lambda/\sqrt{2\pi u'^2} e^{-\frac{\lambda^2 u'^2}{2u'^2}}$ , where  $\lambda = \sqrt{u'^2 \mu'^2}$  is the Taylor scale along the assigned level-crossing direction. As also noticed by Leadbetter and Spaniolo [24], the probability density of upcrossings with positive derivatives  $u' > 0$  at  $u = \ell$  is

$$p(u') = \frac{\lambda^2}{u'^2} e^{-\left(\frac{u' \lambda}{\sqrt{2} u'^2}\right)^2}, \quad (\text{A5})$$

which is the Rayleigh distribution. The absolute mean derivative at  $u = \ell$  level is easily found to be

$$\overline{|u'|}_\ell = \sqrt{\frac{\pi u'^2}{2}} \frac{1}{\lambda} \quad (\text{A6})$$

which is directly related to the Taylor scale, a result that is worth to be emphasised. Note that,  $\overline{|u'|}_\ell$  is independent of the level  $\ell$  in this particular case. That is a consequence of the supposed independence between  $u$  and  $u'$  resulting in  $p(u', u) = p(u')p(u)$  and can of course not be generalised for an arbitrary process. The same result can be obtained by replacing  $q = |u'|$  in Equation (A3), leading

to

$$\overline{|u'|}_\ell = \frac{E\{u'^2 \mid u = \ell\}}{E\{|u'| \mid u = \ell\}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u'^2} = \sqrt{\frac{\pi u^2}{2}} \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{A7})$$

## Appendix 2

### Generalised Rice formula

We consider the velocity field  $u_i(x, z; y, t)$  in the homogeneous plane  $(x, z)$  at a fixed  $y$  position from the wall and at time  $t$ . We deal with the statistics of a quantity  $q$  at contour-crossings  $u_i(x, z; y, t) = \ell$ . Zähle [35] generalised the problem dealing with one-dimensional signals and gave a generalised Rice formula for random  $m \geq 1$  dimensional fields. The theorem 3.2 given in his paper allows us to express the  $n$ th moment of  $q$  at level-crossing contours as

$$\overline{q^n}_\ell = \frac{E\{q^n \times |J(u_i)| \mid u_i = \ell\}}{E\{|J(u_i)| \mid u_i = \ell\}}, \quad (\text{B1})$$

where  $|J(u_i)|$  is the Jacobian of the partial derivatives of  $u_i(x, z; y, t)$  that reduces to  $|J(u_i)| = \sqrt{(\partial u_i / \partial x)^2 + (\partial u_i / \partial z)^2}$  in this case. The relationship (B1) is general and may be applied to more complex situations. One can, for example, wish to sample at some specular points for which  $\partial u_i / \partial x$  and  $\partial u_i / \partial z$  take specified values. The Jacobian in this case reads as  $|J(u_i)| = |(\partial u_i / \partial x)(\partial u_i / \partial z) - (\partial u_i^2 / \partial x \partial z)|$ . The level-crossing frequency that is easily defined as the number of level crossings in a time interval  $T$  divided by  $T$  for one-dimensional signal has to be replaced by the ratio of the total lengths of the segments of level-crossing curve (that is closed) to the surface area  $(x, z)$ . The level-crossing frequency can thus be generalised to be

$$f_\ell = p(u_i = \ell) E(|J(u_i)| \mid u_i = \ell). \quad (\text{B2})$$

## Appendix 3

Panton [38] decomposes the streamwise velocity into an active and passive part  $u(\vec{x}; t) = u_A(\vec{x}; t) + u_P(\vec{x}; t)$ . The mean value  $\bar{u} = 0$ , but not necessarily  $\bar{u}_A$  and  $\bar{u}_P$ . To put it another way,  $\bar{u}_A = -\bar{u}_P \neq 0$ . Passive structures influence  $\overline{uu}$  but not  $-\overline{uv}$ . Consequently,  $-\overline{uv} = -\overline{u}_A \bar{v}$ . The active and passive structures are uncorrelated implying that

$$\overline{u_A u_P} = \bar{u}_A \bar{u}_P = -\bar{u}_A^2. \quad (\text{C1})$$

Panton assumes that the longitudinal velocity takes the composite form varying with  $\sqrt{\bar{u}_\tau^2 - \alpha \bar{U}_c^\alpha}$  and takes  $\alpha = 1$ . Passive eddies coexist with active structures and they play a more dominant role as the limit  $Re_\tau = h^+ \rightarrow \infty$  is approached. They scale as  $\overline{u_P u_P}^* = \overline{u_P u_P} / \bar{U}_c \bar{u}_\tau$ , while active contributions are purely determined by  $\bar{u}_\tau$ , i.e.  $\overline{u_A u_A}^* = \overline{u_A u_A} / \bar{u}_\tau^2$ . Active eddies are the one that are responsible for the cause of the Reynolds shear stress. Panton assumes, therefore, that

$$\begin{aligned} \overline{u_A u_A}^+ &\propto -\overline{uv}^+ = -C_{AA} \overline{uv}^+ \\ \overline{u_A u_P}^+ &= -\bar{u}_A^+ \bar{u}_P^+ \propto -\overline{uv}^+ = -C_{AP} \overline{uv}^+. \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

Combining with Equation (C1) leads to

$$\overline{u_P u_P}^* = \overline{uu}^+ + (2C_{AP} + C_{AA}) \overline{uv}^+ \zeta(h^+), \quad (\text{C3})$$

where the Reynolds number dependence is within  $\varsigma(h^+) = \bar{u}_\tau / \bar{U}_c$ . Panton uses published DNS data and establishes an empirical  $\overline{u_P u_P}^*$  distribution that matches reasonably well with the experiments. The model predicts also quite well the increase  $(\overline{uu^+})_{\max} \propto \ln(Re_\tau)$  of the maximum turbulent intensity near the wall, as indicated in [31].

We propose to use this model to analyse the dependence of the biased production  $\bar{P}_\ell$  at  $u$  level crossings. Suppose that  $v$  and  $u_A$  are jointly Gaussian. One has

$$E(v | u_A) = \frac{r_{u_A v} \sigma_v}{\sigma_{u_A}} (u_A - \bar{u}_A), \quad (\text{C4})$$

where

$$r_{u_A v} = \frac{-\overline{u_A v}}{\sigma_{u_A} \sigma_v} = \frac{-\overline{uv}}{\sigma_{u_A} \sigma_v}$$

is the coefficient of correlation between  $u_A$  and  $v$ ,  $\sigma_{u_A} = \sqrt{\overline{u_A u_A}}$  and  $\sigma_v = \sqrt{\overline{v v}}$  are the standard deviations. One obtains, consequently,

$$E(v | u = \ell) = \frac{r_{u_A v} \sigma_v}{\sigma_{u_A}} \int_{-\infty}^{\infty} (u_A - \bar{u}_A) p(u_A | u = \ell \sigma_u) du_A = \frac{r_{u_A v} \sigma_v}{\sigma_{u_A}} E((u_A - \bar{u}_A) | u = \ell \sigma_u) \quad (\text{C5})$$

according to Equation (16). The expected value  $E((u_A - \bar{u}_A) | u = \ell \sigma_u)$  is still unknown. Our aim being to give a rough estimate of the biased mean production  $\bar{P}_\ell$ , we suppose that  $u_A - \bar{u}_A$  and  $u$  are also jointly Gaussian in which case

$$E((u_A - \bar{u}_A) | u = \ell) = \frac{\overline{(u_A - \bar{u}_A) u}}{\sigma_u} \ell = \frac{\overline{u_A u_A} + \overline{u_A u_P}}{\sigma_u} \ell = \frac{\overline{u_A u_A} - \bar{u}_A^2}{\sigma_u} \ell. \quad (\text{C6})$$

The linear mean square estimation  $\hat{E}((u_A - \bar{u}_A) | u = \ell \sigma_u)$  of the active component in terms of  $u = \ell \sigma_u$  leads of course to the same result. Combining the relationships given above, we conclude that the estimate  $\hat{P}_{\ell b}$  of the biased production at  $u = \ell \sigma_u$  normalised by the local mean production is given by

$$\frac{\hat{P}_{\ell b}}{\bar{P}} = \left( 1 - \frac{\bar{u}_A^2(y)}{\overline{u_A u_A}(y)} \right) \ell^2 = \left( 1 + \frac{C_{AP}}{C_{AA}} \right) \ell^2. \quad (\text{C7})$$

The term under parenthesis at the right of this equation depends upon the active contributions and is consequently Reynolds number independent, according to the arguments of Panton [38], and in so far as the relation (C2) holds true. The Gaussian distribution  $\frac{\hat{P}_{\ell b}}{\bar{P}} \propto \ell^2$  appears clearly in (C7) whose exact form is recovered if locally  $\bar{u}_A^2(y) = 0$ . Repeating the same procedure for the Marusic model (17) leads to the exact Gaussian distribution. We suppose first that the inner  $u^{*+}$  and outer  $u_O^+$  velocity components are uncorrelated and second that the wall-normal velocity  $v$  is independent of outer velocity in the inner layer, i.e.  $E(v u_O) = 0$ . These hypotheses are sufficient to show that the expected values of supplementary terms coming from the modulation part, such as

$$\begin{aligned} \beta_m E(u_O^+ u^{*+} v^+) &= \beta_m E[u_O^+ E(u^{*+} v^+ | u_O^+)] = 0 \\ \beta_m E(u^{*+2} u_O^+) &= \beta_m E[u^{*+2} E(u_O^+ | u^{*+})] = 0 \end{aligned}$$

are identically zero. The relation  $\frac{\hat{P}_{\ell b}}{\bar{P}} = \ell^2$  is straightforward under the hypothesis of joint normality between  $(v, u^*)$  and  $(u^*, u)$ .

## Annexe C

Article à paraître dans la revue  
*European Journal of Mechanics*

# **Vorticity transport in low Reynolds number turbulent channel flows**

Sedat TARDU, Frédéric BAUER

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (LEGI)

B.P. 53 X, 38041, Grenoble, Cédex 9, France

E-mail: [Sedat.Tardu@legi.grenoble-inp.fr](mailto:Sedat.Tardu@legi.grenoble-inp.fr)

## **Abstract**

The vorticity transport mechanism is analyzed in fully developed turbulent channel flows by means of direct numerical simulations data. The later are obtained in large computational domains as in Hoyas and Jiménez (Phys. Fluids, 18, 011702, 2006) to take into account the effect of large scale outer eddies. The Karman number is varied from 180 to 1100 in the simulations. The turbulent intensities of the streamwise and spanwise vorticity components scaled in inner variables are Reynolds number dependent and this is related to the modulation effect of the outer structures in the inner layer in the same way as Mathis et al. (J. Fluid Mech., 715, 163, 2013). The wall normal vorticity intensity scales perfectly with the wall variables. In order to understand the physical mechanism that leads to this Reynolds number independence, the wall normal vorticity is first related to the streamwise velocity  $u$  and wall normal velocity flux in the Fourier domain by using incompressibility. A detailed analysis of the related spectral densities shows that the wall normal vorticity is connected to the low pass filtered streamwise velocity domain concentrated within the inner spectral core. Therefore it is spared from the spectral ridge caused by the outer-layer passive effects and is consequently insensitive to the Reynolds number, when scaled with wall variables.

Subsequently, the transport process of the vorticity intensities is carried out in detail. Such analysis is lacking in the literature. The production of the spanwise component of the enstrophy peaks in the viscous sublayer, while the streamwise and wall normal components are in equilibrium in a rough sense in the median buffer layer. Among all the shear layer components constituting the vorticity field, only the spanwise shear layers of the streamwise velocity, which are basically induced around the low and high-speed streaks are Reynolds number independent.

**Key words:** Wall turbulence, low Reynolds numbers, vorticity transport, shear layers, active and passive eddies.

## 1. Introduction

In wall bounded turbulent flows, the large-scale passive structures contribute to the streamwise and spanwise turbulent intensities, but affect the Reynolds stress relatively little or not at all, which is in line with the original concept of active structures advanced by Townsend (1976). They do however play a major role in the transport of the Reynolds shear stress in the logarithmic sublayer. Structures as long as five times the outer length scale, that are either the packets of coherent vortices (large-scale-motions, LSM) or the amalgamation of the packets (very-large-scale-motions, VLSM) transport the majority of the Reynolds stress in this zone (Del Alamo and Jiménez, 2003, Del Alamo et al., 2004 ; Guala et al., 2006, Baltzer et al., 2013). The clustering of structures begins at (only) moderate Reynolds numbers, and this organization is not a manifestation of large-scale structures stemming from the outer layer. Thus, the occurrence of LSM is not restricted to large Reynolds numbers  $Re$  (Tardu, 1995, 2002; Adrian 2007). Their characteristic length scale in the streamwise direction is the outer scale. The packets of structures in the inner layer develop and gradually reach the logarithmic sublayer. The coherent alignment of the packets in the logarithmic sublayer gives

rise to VLSM's , whose streamwise length may be up to 20 times the outer length scale. The *VLSMs* are therefore capable of transporting a considerable amount of the Reynolds shear stress and of the turbulent energy.

The inner layer structure is complex. The recent studies conducted by Marusic's group (Mathis et al., 2009; Marusic et al., 2010) demonstrate that the effect of the large-scale structures on the streamwise intensity of the turbulence in the inner layer is not only additive. The large-scale motions induce an amplitude modulation of the streamwise velocity fluctuations in the buffer sublayer and of the longitudinal wall shear intensity (Mathis et al., 2013). The latter is nothing but the fluctuating spanwise vorticity at the wall. Thus, Reynolds number effect on the shear layers constituting the vorticity components is expected and such effects are not surprising.

Most of the flow quantities are Reynolds number dependent but few of them are quite robust versus the modification of  $Re$ . A well-known example is the wall normal velocity fluctuations, which are not affected by the outer large-scale passive eddies in a rough sense. This is the consequence of the impermeability constraint as was taken into account in the original Townsend's attached eddies concept. Another quantity which is directly of interest in the present investigation is the turbulent intensity of the wall normal vorticity scaled in wall variables which is remarkably insensitive to the Reynolds number as noticed earlier by Moser et al. (1999) and confirmed later by the Jimenez group in a larger range of  $Re$ . Convincing arguments of why this is so are missing in the literature. The wall normal vorticity  $\omega_y$  plays a fundamental role in the generation of the quasi-streamwise vortices near the wall because one of its constituents, namely the streamwise shear layer of the spanwise velocity leads to the coherent quasi-streamwise vortices after tilting by the mean shear. The second point concerns the transport mechanism of the vorticity component intensities that has not been analyzed before to our knowledge.

This study deals with the vorticity transport mechanism in wall turbulent flows through direct numerical simulations in a fully developed channel flow. Large computational domains are needed to take into account the effect of the large-scale eddies implying some computational cost problems. Thus, the Reynolds number is necessarily limited to low values, but some key elements concerning the issues discussed above could be elucidated here. The paper is organized as follows. We first briefly discuss the direct numerical simulations we performed in the following section. The section 3 summarizes the main results, beginning by the transport equations of the turbulent intensities of the vorticity components. The insensitivity of the wall normal vorticity intensity to the Reynolds number is analyzed by a spectral method. We further discuss the major shear layer components that play some role in the physics of the vorticity in the inner layer.

## 2. Direct numerical simulations and notations

Direct numerical simulations (DNS) of four fully developed turbulent channel flows have been performed at Karman numbers  $Re_\tau = 180, 395, 590$  and  $1100$  in particularly large computational domains similarly to Hoyas and Jiménez [18]. Here  $Re_\tau = h\bar{u}_\tau/\nu$ , where  $\bar{u}_\tau$  is the shear velocity,  $h$  is the channel half width and  $\nu$  is the viscosity. Periodical boundary conditions are used in the homogeneous streamwise  $x$  and spanwise  $z$  directions. The mesh nodes are distributed uniformly along  $x$  and  $z$ , and refined near the wall in the wall normal  $y$  direction. The mesh size  $\Delta y$  is set to one third of the Kolmogorov scale  $\eta$  near the wall while  $\Delta y \approx \eta$  at the centerline. The time integration is performed according to a fractional step approach in which convective and diffusive terms are integrated by a three stage and third order low storage Runge Kutta scheme (Spalart et al., 1991). High accuracy fourth order optimized explicit schemes using a five points stencil are used in order to reach spectral-like accuracy. These schemes have dispersion relation preserving properties when the Courant–



Friedrichs–Lewy number is smaller than 0.8, as is the case here. The details can be found in Bauer et al. [19]. The table 1 gives the resolution, the grid spacings in wall units  $(\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+)$  and the computational domain size scaled with the half height  $h$  of the channel  $(l_x/h, l_z/h)$ . Hereafter  $( )^+$  denotes quantities scaled by the inner variables  $\bar{u}_\tau$  and  $v$ . The statistics presented here have been obtained from 10 independent fields. Two fields are considered as independent if they are separated by a time larger than the time required to a particle at the channel center to cross the length of the computational domain in the streamwise direction. All the major turbulence statistics compare perfectly well with published data obtained by pseudo-spectral DNS of the evolution problem for the wall normal vorticity and the Laplacian of the wall normal velocity as in Mosser et al. (1999). We will use hereafter mixed notations, i.e. the velocity component in the streamwise  $(x_1, x)$  will be denoted by either  $u_1$  or  $u$ , the component in the wall normal direction  $(y_2, y)$  by  $u_2$  or  $v$  and the spanwise  $(x_3, z)$  velocity component by  $u_3$  or  $w$ . The symbol  $\overline{(\ )}$  refers to the average of a given quantity in homogeneous  $x - z$  planes.

### 3. Results

#### 3.1 Turbulent intensities of vorticity components

The turbulent intensities profiles of the fluctuating streamwise  $\sigma_{\omega_x}^+ = \sqrt{\omega_x^+ \omega_x^+}$ , wall normal  $\omega_y^+$  and spanwise  $\omega_z^+$  vorticity components scaled by the inner variables, versus the wall normal distance  $y^+$  at four Reynolds numbers investigated here, are shown in Fig. 1. It is recalled the shear layers entering into the local vorticity components are:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\
\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\
\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1}$$

The results presented in Fig. 1 agree perfectly well with Moser et al. (1999), and the Jiménez group (<http://torroja.dmt.upm.es/turbdata/>). The remarkable insensitivity of inner scaled  $\sigma_{\omega_y}^+$  to the Reynolds number, particularly in the inner layer  $y^+ \leq 100$  is of special interest here. We will focus on this characteristic and explain why the wall normal vorticity is so robust in 3.3. The streamwise and wall normal vorticity intensities  $\sigma_{\omega_x}^+$  and  $\sigma_{\omega_z}^+$  depend clearly on  $Re_\tau$ , with a more pronounced effect in the layer  $y^+ < 50$ . The large-scale outer passive eddies not only add to the active motions but modulate the active part at the same time according to Mathis et al., (2009). The modulation of the near wall velocity field in the viscous sublayer by the outer passive eddies, affects directly the wall shear stress. It can easily be shown that the streamwise and spanwise velocity fluctuations next to the wall are asymptotically related to the vorticity components at the wall by:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\omega_{z0}}^+ &= \lim_{y^+ \rightarrow 0} \frac{\sqrt{uu}}{\bar{U}}(y^+) \\
\sigma_{\omega_{x0}}^+ &= \lim_{y^+ \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ww}}{\bar{U}}(y^+)
\end{aligned} \tag{2}$$

where the subindex 0 refers to the wall. Therefore, the Reynolds number effect on  $\sigma_{\omega_x}^+$  and  $\sigma_{\omega_z}^+$  at least in the viscous sublayer, is indeed expected, and it is due to the direct modulation effect of the outer passive large-scale motions. The statistical model of the Marusic group predicts the spanwise vorticity intensity as  $\sigma_{\omega_{z0}}^+ = 0.298 + 0.018 \ln(Re_\tau)$  which collapses

reasonably well with existing data up to  $Re_\tau = 10^4$  (Mathis et al., 2013). Our data are restricted to low Reynolds numbers and correlate quite well with  $\sigma_{\omega_{z0}}^+ = 0.26 + 0.02 \ln(Re_\tau)$  in good agreement with Schlatter and Örlü (2010) within the same  $Re_\tau$  range. There is a lack in the literature on the presumable modulation effect of the outer eddies on the spanwise velocity fluctuations near the wall. The spanwise velocity is structurally similar to the spanwise one, in the overlapping layer according to the Townsend's concept of attached eddies. In the inner layer, however the morphology of both fluctuating fields are different. Yet, a similar effect of the excitation imposed by the outer eddies on the  $w$  fluctuations can reasonably be expected within the viscous sublayer. The streamwise vorticity intensity at the wall increases also with  $\ln(Re_\tau)$ , but faster than  $\sigma_{\omega_{z0}}^+$ , as  $\sigma_{\omega_{x0}}^+ \propto 0.03 \ln(Re_\tau)$ .

### 3.2 Vorticity transport

The local, instantaneous transport equation of the fluctuating vorticity  $\omega_i$  is given by

$$\frac{D(\omega_i + \bar{\omega}_i)}{Dt} = (\omega_k + \bar{\omega}_k) \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2(\omega_i + \bar{\omega}_i)}{\partial x_k \partial x_k} \quad (3)$$

as it can be found in any textbook see for example Tardu (2011). In the equation (3),  $D/Dt$  is the material derivative,  $\bar{\omega}_i$  and  $\bar{U}_i$  are respectively the mean vorticity and velocity,  $u_i$  is the fluctuating velocity component and the Einstein rule over the repeated indices  $k$  applies. The first term at the right of the equation (3) regroups the production terms such as the stretching, tilting and twisting of the vorticity components. The transport equation governing the intensity  $\overline{\omega_i^2}/2$  is obtained by multiplying both sides of (3) by  $\omega_i$  and averaging. It reads for:

$$0 = \bar{P}_{\omega_i} - \bar{T}_{\omega_i} - \bar{\varepsilon}_{\omega_i} + \bar{D}_{\omega_i} \quad (4)$$

where  $\overline{P}_{\omega_i}$  is the production,  $\overline{T}_{\omega_i}$  and  $\overline{\varepsilon}_{\omega_i}$  are respectively the turbulent transport and dissipation and  $\overline{D}_{\omega_i}$  is the molecular diffusion. The explicit forms of these terms are:

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{\omega_i} &= \overline{(\omega_i + \overline{\Omega}_i) \omega_k \frac{\partial(u_i + \overline{U}_i)}{\partial x_k}} \\
\overline{T}_{\omega_i} &= \frac{1}{2} \overline{(u_k + \overline{U}_k) \frac{\partial \omega_i^2}{\partial x_k}} + \overline{(u_k + \overline{U}_k) \omega_i \frac{\partial \overline{\Omega}_i}{\partial x_k}} \\
\overline{\varepsilon}_{\omega_i} &= \overline{\nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k}} \\
\overline{D}_{\omega_i} &= \frac{1}{2} \overline{\nu \frac{\partial^2 (\omega_i)^2}{\partial x_k \partial x_k}}
\end{aligned} \tag{5}$$

These terms contain high order derivatives that are delicate to determine next to the wall in DNS and hardly measurable in experiments explaining probably why such analysis has not been conducted before. Each term in (5) is individually computed, and the balance equation (4) is directly verified in this investigation. The maximum deviation is smaller than  $10^{-4}$  across the channel. There is however one exception, at one  $y^+$  position, and only in the transport equation of the spanwise vorticity intensity. At the first mesh point  $y^+ = 0.25$ , the numerical schemes could not achieve equilibrium better than  $2 \times 10^{-3}$  in the  $\overline{\omega_z^{+2}}/2$  transport equation, mainly because the diffusion is a rapidly varying function of  $y^+$  within a few viscous wall units (Fig. 2c). Thus, at this point only, the balance of the spanwise vorticity transport was forced to zero by slightly modifying the diffusion in Fig. 2c.

The system (5) is considerably simplified in the case of a channel flow homogeneous in the streamwise  $x$  and spanwise  $z$  directions. In this case, the mean velocity  $\overline{U}(y)$  and the shear  $\overline{\Omega}_z(y) = -\frac{d\overline{U}}{dy}$ , intervene only directly in the production of the wall normal  $\omega_y$  and the transport of the spanwise  $\omega_z$  components that read specifically for:

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{\omega_y} &= \overline{\omega_y \omega_x \frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{\omega_y \omega_y \frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{\omega_y \omega_z \frac{\partial v}{\partial z}} - \overline{\omega_y \frac{\partial v}{\partial z} \frac{d\overline{U}}{dy}} \\
\overline{T}_{\omega_z} &= \frac{1}{2} \overline{u \frac{\partial \omega_z^2}{\partial x}} + \frac{1}{2} \overline{v \frac{\partial \omega_z^2}{\partial y}} + \frac{1}{2} \overline{w \frac{\partial \omega_z^2}{\partial z}} - \overline{v \omega_z \frac{d^2 \overline{U}}{dy^2}}
\end{aligned} \tag{6}$$

That is not only the consequence of the homogeneity but also of the symmetry of the flow with respect to the planes perpendicular to the  $z$  direction, implying that all correlations involving  $w$  and its uneven derivatives with respect to  $x$  or  $z$  are zero.

Fig. 2a shows the distribution of the streamwise vorticity intensity  $\overline{\omega_x^2}/2$  transport terms versus  $y^+$  at four different Reynolds numbers investigated here. The transport terms are scaled with inner variables  $v$  and  $\overline{u}_\tau$ . It is seen that the turbulent transport  $\overline{T}_{\omega_x}$  is negligible everywhere. The viscous diffusion is equal to the dissipation at the wall for all the components, i.e.,  $\overline{D}_{\omega_i}^+ = -\overline{\varepsilon}_{\omega_i}^+$  at  $y^+ = 0$  as it should be. The vorticity transport terms are of significant magnitude only in the inner layer  $y^+ < 100$ . The diffusion decreases from the wall and vanishes at  $y^+ \geq 10$ . The production  $\overline{P}_{\omega_x}^+$  peaks at  $y^+ = 15$  as the mean production of kinetic energy  $-\overline{uv} \partial \overline{U} / \partial y$ , and next to  $y^+ = 20$  where the quasi-streamwise vortices are mostly populated (Jeong et al. 1997). There is equilibrium between the production and dissipation from  $y^+ = 10$  up to  $y^+ = 100$ .

There is a relatively small Reynolds number effect on the wall normal vorticity intensity  $\overline{\omega_y^2}/2$  transport terms in the viscous sublayer as shown in Fig. 2b. The maximum production  $\overline{P}_{\omega_y}^+$  takes place next to the edge of the viscous sublayer at  $y^+ = 8$ , closer to the wall compared to  $\overline{P}_{\omega_x}^+$  (Fig. 2a). There is no dissipation-production equilibrium in the  $\overline{\omega_y^2}/2$

transport. The dissipation  $-\varepsilon_{\omega_y}^+$  peak is offset from that of  $\overline{P}_{\omega_y}^+$ , with a clear maximum at  $y^+ = 15$ .

The transport process of the spanwise vorticity intensity  $\overline{\omega_z^2}/2$  is different from that of  $\overline{\omega_x^2}/2$  and  $\overline{\omega_y^2}/2$  in several respects. The maximum production  $\overline{P}_{\omega_z}^+$  occurs at  $y^+ = 3$ , as it can be seen in Fig. 2c, suggesting clearly that the viscous sublayer plays a dominant role in the regeneration of the spanwise vorticity fluctuations. The dissipation  $-\varepsilon_{\omega_z}^+$  reaches its maximum at the edge of the viscous sublayer  $y^+ = 5$ . The local equilibrium  $\overline{P}_{\omega_z}^+ = -\varepsilon_{\omega_z}^+$  is reached further at  $y^+ \geq 15$ .

The equation of the transport of the wall normal vorticity results from the equation (3), and leads after simplification to:

$$\frac{D\omega_y}{Dt} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \overline{\Omega}_z - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \omega_y \quad (7)$$

A simple order of magnitude analysis is sufficient to show that the dominant production term for  $\omega_y$  is  $\overline{\Omega}_z \partial v / \partial z$  within the inner sub-layer where  $\overline{\Omega}_z^+ \approx 1$ , and this is simply the stretching of the spanwise vorticity  $\overline{\Omega}_z$  under the effects of the shear  $\partial v / \partial z$ . This then enables us to suggest a simplified physical picture of the dynamics of vorticity within the buffer layer. The normal vorticity is zero at the wall, but it is created as the spanwise vorticity is lifted into the region immediately adjacent to the wall, wherein the fluctuating  $\omega_z$  is also generated as discussed through Fig. 2c. It is then tilted, still under the effects of the mean shear, to produce the longitudinal component  $\omega_x$ , which may roll up to form quasi-longitudinal vortices which play a fundamental role in the structure of wall turbulence. This scenario, which is supported

by the results presented in Fig. 2, is in agreement with Brooke and Hanratty (1993), and Bernard et al. (1993) as recently reviewed by Tardu (2014).

### 3.3 Wall normal vorticity intensity versus the Reynolds number

The Fourier transform of the streamwise velocity is exactly given by

$$\underline{\underline{u}} = -\frac{\iota k_z}{k_x^2 + k_z^2} \underline{\underline{\omega_y}} + \frac{\iota k_x}{k_x^2 + k_z^2} \underline{\underline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}} \quad (8)$$

as a consequence of the continuity equation and the definition of the wall normal vorticity. In this expression  $\underline{\underline{\quad}}$  reads for the Fourier transform,  $k_i$  is the wavenumber in the assigned direction  $i$ , and  $\iota = \sqrt{-1}$ . Consequently, the spectral energy density  $E_{uu}$  of  $u$  reads for

$$E_{uu} = \frac{k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\omega_y \omega_y} + \frac{k_x^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}} - \frac{2k_x k_z}{(k_x^2 + k_z^2)^2} \left\{ I_{\omega_y} I_{\frac{\partial v}{\partial y}} + R_{\omega_y} R_{\frac{\partial v}{\partial y}} \right\} \quad (9)$$

where  $I$  and  $R$  stands respectively for the imaginary and real parts of the Fourier transforms of the corresponding quantities. Fig. 3 a and b show the premultiplied spectra of  $k_x k_z E_{uu}$  and

$A_{\omega_y} = k_x k_z \frac{k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\omega_y \omega_y}$  at  $y^+ = 12$ . All the quantities are scaled by the inner variables

and the superscript  $(\quad)^+$  is omitted to alleviate the notations. The contours in lines correspond to  $Re_\tau = 395$  and in color to  $Re_\tau = 1100$ . The data are presented in the same way as Hoyas and Jiménez (2006) and they are in perfect agreement with these authors. Two isolines are given for each Reynolds number, representing the high-intensity core, and its outer border. It is seen that the inner core scales with wall variables and is therefore Reynolds number independent in the inner layer. The inner scaling fails at the outer right hand corner along the spectral ridge  $\lambda_z^+ = 0.15 \lambda_x^+$  exactly again as in Hoyas and Jiménez (2006). This part of the

spectrum is directly affected by the large-scale inactive eddies (Large-scale-motions, LSM) that are responsible for the  $Re_\tau$  effects in the streamwise velocity intensity  $\sigma_u^+$  and the spectral ridge is absent in the  $v$  spectra and the  $uv$  cospectra (not shown). In return, the LSM transport transport nearly 50% of the Reynolds shear stress beyond the wall layer (Kim and Adrian (1999), Liu et al., (2001), Del Alamo et Jiménez, (2003)) as also confirmed by the present data.

It is noticed in Fig. 3 that the spectra  $k_x k_z E_{uu}$  is nearly identical to  $A_{\omega_y}$  related to the wall normal vorticity. That is because the premultiplied second and third terms of the equation (9) linked to the wall normal velocity flux

$$B_{\frac{\partial v}{\partial y}} = k_x k_z \frac{k_x^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}}$$

and to the coupling of  $\partial v / \partial y$  with  $\omega_y$  denoted by

$$C_{\omega_y; \frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{2k_x^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} \left\{ I_{\omega_y} I_{\frac{\partial v}{\partial y}} + R_{\omega_y} R_{\frac{\partial v}{\partial y}} \right\}$$

are two orders of magnitude smaller than  $A_{\omega_y}$ . Precisely the contribution of  $A_{\omega_y}$  to  $k_x k_z E_{uu}$  is 96%, while  $B_{\frac{\partial v}{\partial y}}$  contribute by nearly 4% and  $C_{\omega_y; \frac{\partial v}{\partial y}}$  is entirely negligible. Furthermore the

spectral supports of  $B_{\frac{\partial v}{\partial y}}$  and  $C_{\omega_y; \frac{\partial v}{\partial y}}$  do not match the support of  $A_{\omega_y}$  as it can clearly be seen

in Fig. 4. The effect of the large scale motions on  $B_{\frac{\partial v}{\partial y}}$  and  $C_{\omega_y; \frac{\partial v}{\partial y}}$  is clearly perceptible in Fig.

4, but, once again, these terms are negligible in the range of the Reynolds numbers investigated here. The direct consequence of these observations is that

$$E_{uu} \approx \frac{k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\omega_y \omega_y}$$



leading to  $\underline{\underline{u}} = -\frac{\iota k_z}{k_x^2 + k_z^2} \underline{\underline{\omega_y}}$ , which inversely gives

$$\underline{\underline{\omega_y}} = \left[ -\iota \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z} \right] \underline{\underline{u}} = H(\iota k_x, \iota k_z) \underline{\underline{u}} \quad (10)$$

The term under the bracket at the right hand side of the last equation plays the role of a low pass-filter  $H(\iota k_x, \iota k_z)$  that suppresses the spectral ridge and the part affected by the passive eddies of the  $u$  spectra. That can clearly be seen in Fig. 5a that shows the contours of the filter amplitude  $|H|^2$  and the premultiplied spectra  $k_x k_z E_{uu}$  at  $Re_\tau = 1100$ . Fig. 5b shows the premultiplied spectra of  $\omega_y$  deduced directly from the equation (10) (in colors) and which collapses almost exactly with the real spectra of  $\omega_y$  (in lines). Similar results are obtained into the entire layer within the range of the Reynolds numbers investigated here. The clear conclusion is that the wall normal vorticity is connected the low pass filtered  $u$  domain concentrated within the inner core. This is why it is spared from the outer-layer passive effect and is so robust via the Reynolds number.

The cut-off region of the filter  $H$  is the inner spectral core. Therefore the Reynolds number independency of  $\sigma_{\omega_y}^+$  is expected to hold at larger Reynolds numbers at least in the inner layer  $y^+ \leq 100$ . This point will be further discussed later. The turbulent intensity of the spanwise vorticity is given literally by

$$\overline{\omega_y^{+2}} = \overline{(\partial u / \partial z)^{+2}} + \overline{(\partial w / \partial x)^{+2}} - 2 \overline{(\partial u / \partial z)^+ (\partial w / \partial x)^+} \quad (11)$$

The last two terms at the right hand side of this equality are an order of magnitude smaller than the  $\overline{(\partial u / \partial z)^{+2}}$  shear layer intensity, and the latter is remarkably Reynolds number independent as shown in Fig. 6a. This independence persists also in the one-dimensional

spectra  $k_z^{+2} E^+_{uu}(k_z^+)$  (not shown). It has to be emphasized that turbulent intensities of all the shear layer components defining the vorticity field depend on  $Re_\tau$ , except  $\overline{(\partial u / \partial z)^{+2}}$ , as we carefully checked by analyzing each term of the equation (1). The transport equation of  $\overline{(\partial u / \partial z)^2}$  can easily be found and reads for:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = -2 \overline{\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial (\bar{U} + u)}{\partial y}} + 2 \overline{\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial y}} + 2R \overline{\frac{\partial u}{\partial z}} \quad (12)$$

where  $R$  is

$$R = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (13)$$

and  $p$  is the fluctuating pressure. The first term at the right hand side of (12) can be interpreted as the production of  $\overline{(\partial u / \partial z)^2}$  by the mean shear. It is twice larger than the sum of the last two. The analysis of each term of (12) revealed a remarkable Reynolds number insensitivity at  $y^+ \geq 20$  and a slight  $Re_\tau$  dependence in the viscous and low buffer layers. These results are not reported here for the sake of brevity.

The streamwise  $\partial w / \partial x$  shear layers play a fundamental role in the in the generation of the quasi-streamwise vortices through the tilting term  $(-d\bar{U}/dy)(\partial w / \partial x)$  of the streamwise vorticity transport equation (Brooke and Hanratty 1993 ; Tardu et al., 2008) . However, the contribution of  $\overline{(\partial w / \partial x)^{+2}}$  to  $\overline{\omega_y^{+2}}$  is significantly smaller compared to  $\overline{(\partial u / \partial z)^{+2}}$  as indicated before (Fig. 6b). The profiles of the intensity  $\overline{(\partial w / \partial x)^{+2}}$  and of the correlation  $-2 \overline{(\partial u / \partial z)^+ (\partial w / \partial x)^+}$  (not shown) are similar and they are both Reynolds number dependent. These last two quantities peak respectively at  $y^+ = 50$  and  $y^+ = 30$  with the maximum

varying roughly as  $10^{-3}\ln(Re_\tau)$ . Supposing that  $\overline{(\partial u/\partial z)^{+2}}$  is universally Reynolds number independent, and using the extrapolation of the  $10^{-3}\ln(Re_\tau)$  quoted to before, one needs Reynolds numbers of about  $Re_\tau = 10^6$  in order that the intensity  $\overline{(\partial w/\partial x)^{+2}}$  becomes comparable to  $\overline{(\partial u/\partial z)^{+2}}$ . This range of Reynolds number is far being unrealistic from both academic and practical points of view and corresponds for example to the atmospheric flow data (Kunkel and Marusic, 2006). These arguments are of course speculative, since the data analyzed here are restricted to a small range of  $Re_\tau$  in one hand, and that the extrapolation we use may not be valid beyond  $Re_\tau = 10^3$ . However, this discussion points at the fact that one should be careful concerning the generalization of the  $\sigma_{\omega_y}^+$  universality that can clearly be questioned in the high Reynolds number wall layer turbulence.

#### 4. Conclusion

Vorticity transport mechanism is analyzed in a turbulent channel flow covering the Reynolds number range  $180 \leq Re_\tau \leq 1100$ , by direct numerical simulations. The computations cover typically a domain extending from  $24h$  in the streamwise direction to  $10h$  in the span. The wall normal resolution varies from  $0.3\eta$  near the wall to  $\eta$  at the centerline where  $\eta$  is the Kolmogorov scale.

The turbulent intensities of the spanwise and streamwise vorticity components depend on the Reynolds number basically below the edge of the buffer layer  $y^+ < 30$ . The largest  $Re_\tau$  dependence is seen in the viscous sublayer. It is attributed to the modulation of the near wall velocity field, imposed by the outer-layer passive eddies. The streamwise vorticity at the wall is twice more sensitive to  $Re_\tau$  than the spanwise one.

The root-mean-square of the wall normal vorticity fluctuations scaled in inner variables is remarkably independent of  $Re_\tau$ . The dominant term of the spanwise vorticity is the  $\partial u / \partial z$  shear layer. The latter is the only shear layer component that perfectly scales with wall variables, among the other components constituting the vorticity field. The  $Re_\tau$  independence of  $\partial u / \partial z$  persists also in the one-dimensional spectra in the whole wavenumber range.

The production of the streamwise vorticity intensity  $\overline{\omega_x^{+2}}/2$  is in equilibrium with the dissipation above the edge of the viscous sublayer. It reaches its maximum in the medium buffer layer at  $y^+ = 15$  where the genesis process of the quasi-streamwise vortices is in its maturity stage. The maximum production of the wall normal vorticity  $\overline{\omega_y^{+2}}/2$  is shifted towards the wall to  $y^+ = 8$ . There is no equilibrium between the production and dissipation in the  $\overline{\omega_y^{+2}}/2$  regeneration. The transport process of the spanwise vorticity intensity  $\overline{\omega_z^2}/2$  is different from that of  $\overline{\omega_x^2}/2$  and  $\overline{\omega_y^2}/2$  in several respects. The viscous sublayer plays a dominant role in this case and the  $\overline{\omega_z^{+2}}/2$  production peaks at  $y^+ = 3$ . These observations are in agreement with the vorticity generation process next to the wall. The spanwise vorticity lines coalesce in the viscous sublayer. They are subsequently lifted by the mean shear to create compact zones of  $\omega_y$ , which in return are tilted to generate regions of concentrated streamwise vorticity. The latter may then roll up to form coherent quasi-streamwise vortices.

There is a simple relation in Fourier domain that relates the local streamwise velocity to the wall normal vorticity and the flux of vertical velocity. This relationship results from incompressibility and reveals a low pass filter in the spectral domain. The cut-off region of this filter is the inner spectral core. Detailed analysis of the contributions of different terms to the related spectral densities has shown that the wall normal velocity flux plays a negligible

role. It is consequently found that the wall normal vorticity is connected to the low pass filtered  $u$  signal domain concentrated within the inner core. Thus, it is spared from the spectral ridge of  $u$  caused by the outer-layer passive effects and of the Reynolds number.

The component  $\partial w / \partial x$  of  $\omega_y$  plays a capital role in the generation of the coherent structures. Its contribution to  $\overline{\omega_y^{+2}}$  is an order of magnitude smaller than the the shear layer intensity  $\overline{(\partial u^+ / \partial z^+)^2}$  within the range of the Reynolds numbers investigated here. Yet,  $\overline{(\partial w^+ / \partial x^+)^2}$  and the cross correlation  $-2\overline{(\partial u / \partial z)^+ (\partial w / \partial x)^+}$  increases with  $Re_\tau$ . A rough extrapolation of these variations, that stays to be confirmed, suggests that wall normal vorticity could be independent of  $Re_\tau$ , up to typically  $Re_\tau = 10^6$ .

## Acknowledgments

This work was granted access to the HPC resources of IDRIS under the allocation 100226 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif)).

## References

- Adrian R.J. Hairpin vortex organization in wall turbulence. *Phys. Fluids*, 19, 041301, 2007.
- Baltzer J.R., Adrian R.J., Wu X., 2013, Structural organization of large and very large scales in turbulent pipe flow simulation, *J. Fluid Mech.*, 720, 236.
- Bauer F., Tardu S., Doche O., 2014, Efficiency of high order DRP schemes in direct numerical simulations of incompressible turbulent flows. *Computers and Fluids*. 10.1016/j.compfluid.2014.10.009.
- Bernard P.-S., Thomas J.-M., Handler R.-A , 1993, Vortex dynamics and the production of Reynolds stress, *J. Fluid Mech.*, 253, 385.
- Brooke J.-W., Hanratty T.-J., 1993, Origin of turbulence producing eddies in a channel flow, *Phys. Fluids*, 6(6), 2101.

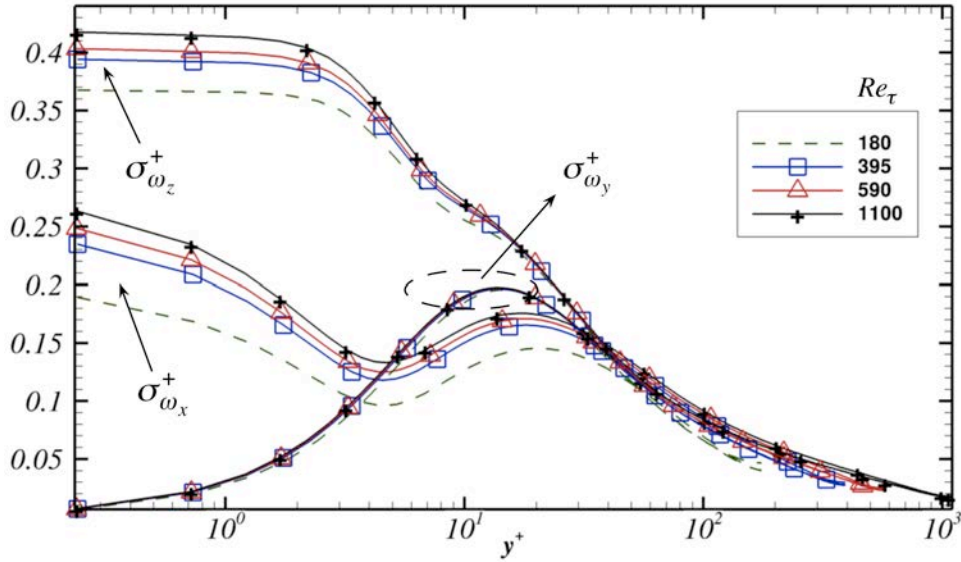
- Del Alamo J.C., Jimenez J. 2003, Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Phys. Fluids*, 15(6), L41.
- Del Alamo J.C., Jimenez J., Zandonade P., Moser R.D., 2004, Scaling of the energy spectra of turbulent channels, *J. Fluid Mech.*, 500, 135.
- Guala M., Hommema S.E., Adrian R.J., 2006, Large-scale and very large scale motions in turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 554, 521.
- Hoyas S., Jimenez, 2006 J. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Phys. Fluids*, 18, 011702.
- Jeong J., Hussain F., Schoppa W., Kim J., 1997, Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 332, 185.
- Kim K.C., Adrian R.J., 1999, Very large-scale motion in the outer layer. *Phys. Fluids* 11, 417–422.
- Kunkel G.J., Marusic I., 2006 Study of the near wall turbulent region of the high Reynolds number boundary layer using an atmospheric flow. *J. Fluid Mech.*, 548, 375.
- Liu Z.C., Adrian R.J., Hanratty T.J., 2001, Large scale modes of turbulent channel flow: transport and structure. *J. Fluid Mech.*, 448, 53, 2001.
- Marusic I., Mathis R., Hutchins N., 2010, Predictive model for wall-bounded turbulent flow. *Science*, 329, 193.
- Mathis R., Hutchins N., Marusic I., 2009, Large-scale amplitude modulation of the small-scale structures in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 628, 311.
- Mathis R., Marusic I., Chernyshenko I., Hutchins N., 2013, Estimating wall-shear-stress fluctuations given an outer region input. *J. Fluid Mech.*, 715, 163.
- Moser R.D., Kim J., Mansour N.N., 1999, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ , *Phys. Fluids* 11, 94–945.
- Schlatter P., Orlu R., 2010, Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 619, 116.
- Spalart P.R., Moser R.D., Rogers M.M., 1991, Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions. *Journal of Computational Physics*, 96(2) :297\_324, 1991.
- Tardu S. , 1995, Characteristics of Single and Clusters of Bursting Events in the Inner Region of a Turbulent Channel Flow; Part 1: Shear Layer Events. *Exp. Fluids*, 20, 112.
- Tardu S. Characteristics of Single and Clusters of Bursting Events in the Inner Region of a Turbulent Channel Flow; Part 2: Level Crossing Events, 2002, *Exp. Fluids*, 33, 640.
- Tardu S., Nacereddine R., Doche O., 2008, An interactive bypass transition mechanism in wall bounded flows. *J. Fluid Mechanics*, 615, pp. 345-369.
- Tardu S., 2011, Statistical Approach to Wall Turbulence, John Wiley & Sons, ISTE, ISBN 978-1-84821-262-6, 312 pp.

Tardu S., 2014, Transport and coherent structures in wall turbulence John Wiley & Sons, ISTE, ISBN-10: 1848213956, 459 pp..

Townsend A.A., 1976, The structure of turbulent shear flow, Cambridge University Press, Cambridge.

$Re_\tau$	$Re_\tau$ actual	Resolution ( $N_x \times N_y \times N_z$ )	$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$	$l_x/h$	$l_z/h$
180	177.73	771x129x387	8.80	0.49 (0.31 $\eta$ ) 5.59 (1.52 $\eta$ )	5.84	12 $\pi$	4 $\pi$
395	388.77	1691x283x849	8.81	0.48 (0.33 $\eta$ ) 5.57 (1.26 $\eta$ )	5.85	12 $\pi$	4 $\pi$
590	580.01	1651x423x1113	8.98	0.48 (0.34 $\eta$ ) 5.56 (1.15 $\eta$ )	5.00	8 $\pi$	3 $\pi$
1100	1090.82	3079x789x2075	8.98	0.48(0.34 $\eta$ ) 5.55 (0.98 $\eta$ )	5.00	8 $\pi$	3 $\pi$

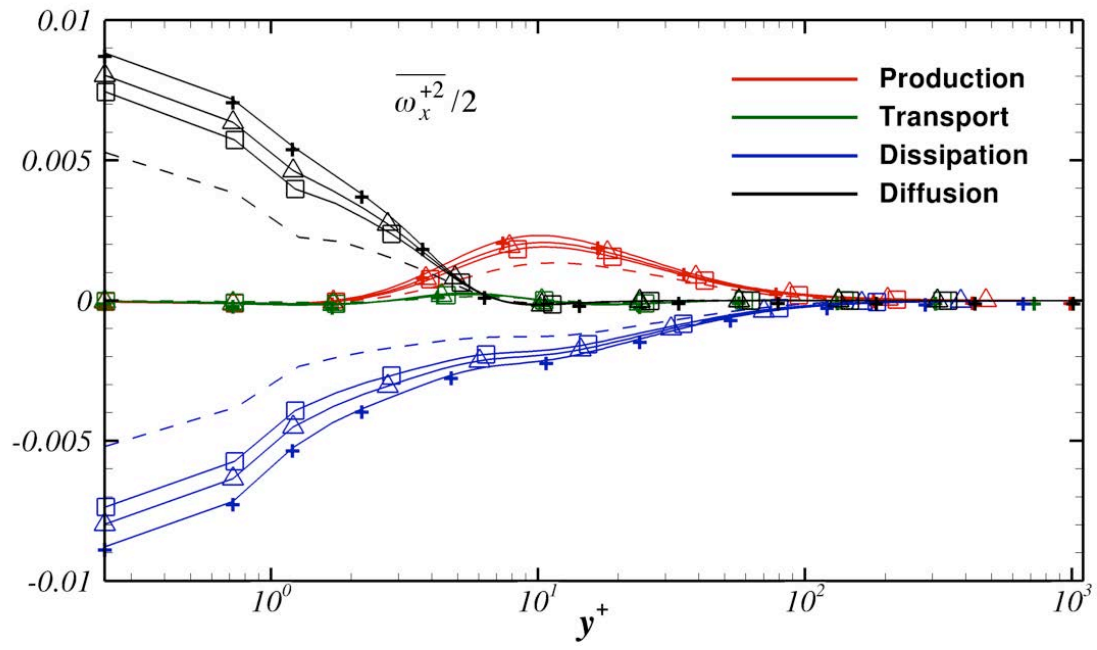
**Table 1.** Simulations parameters in the streamwise, wall normal and spanwise directions ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Both smallest (first line) and largest (second line) grid spacing are given for wall normal direction. The number in parenthesis is the wall-normal grid spacing scaled by Kolmogorov length  $\eta$ .



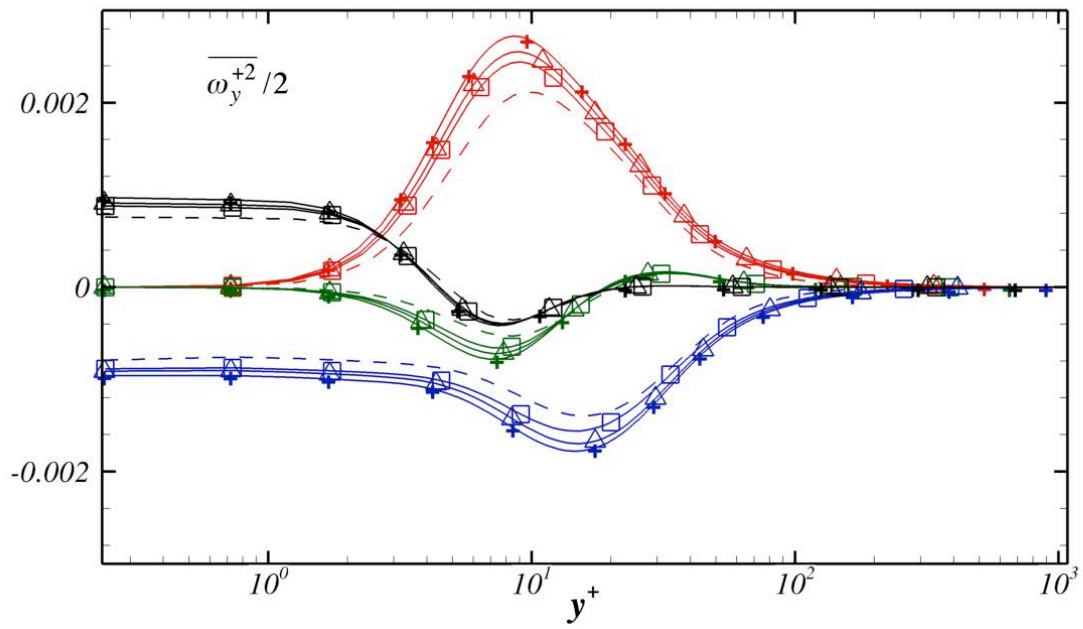
**Figure 1** Root mean square of the fluctuating vorticity intensities versus the wall normal distance in inner variables at different Reynolds numbers.



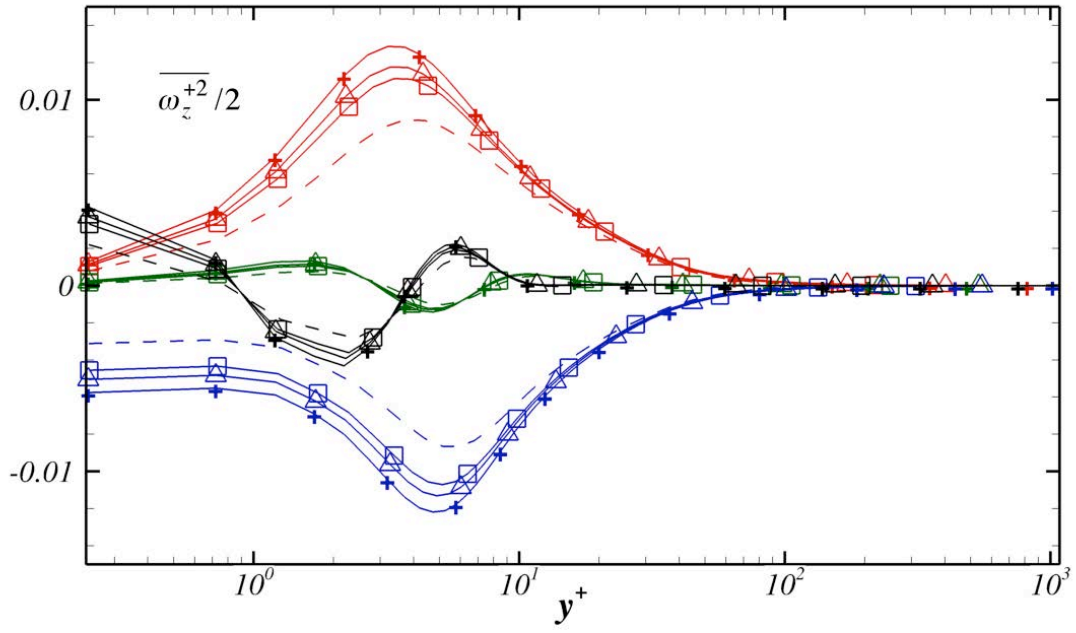
a)



b)



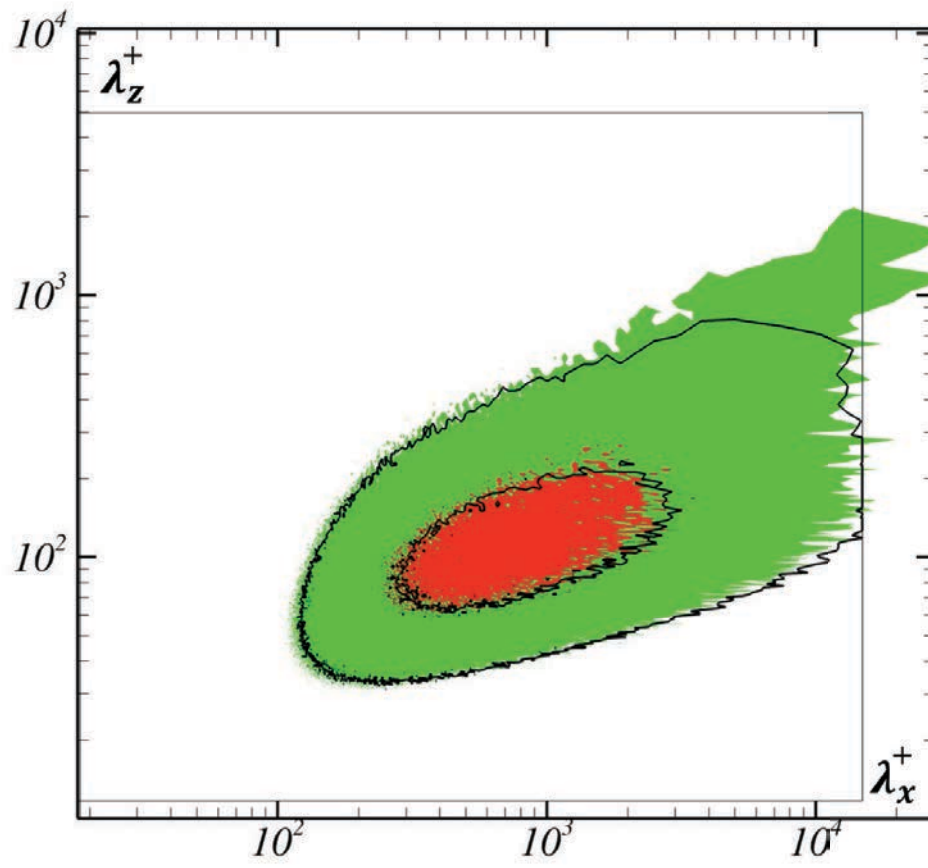
c)



**Figure 2** Transport terms of the streamwise (a) wall normal (b) and spanwise (c) vorticity intensities. For legend see Fig. 1 and Fig. 2a.

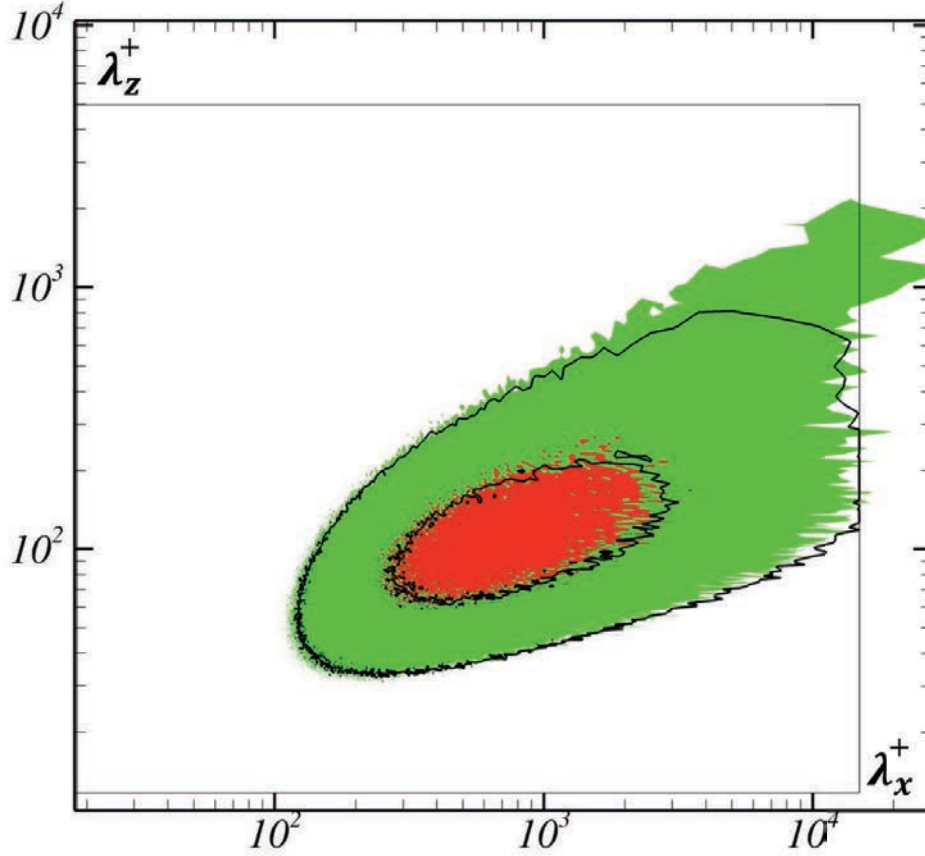
a)

$$k_x k_z E_{uu}$$



b)

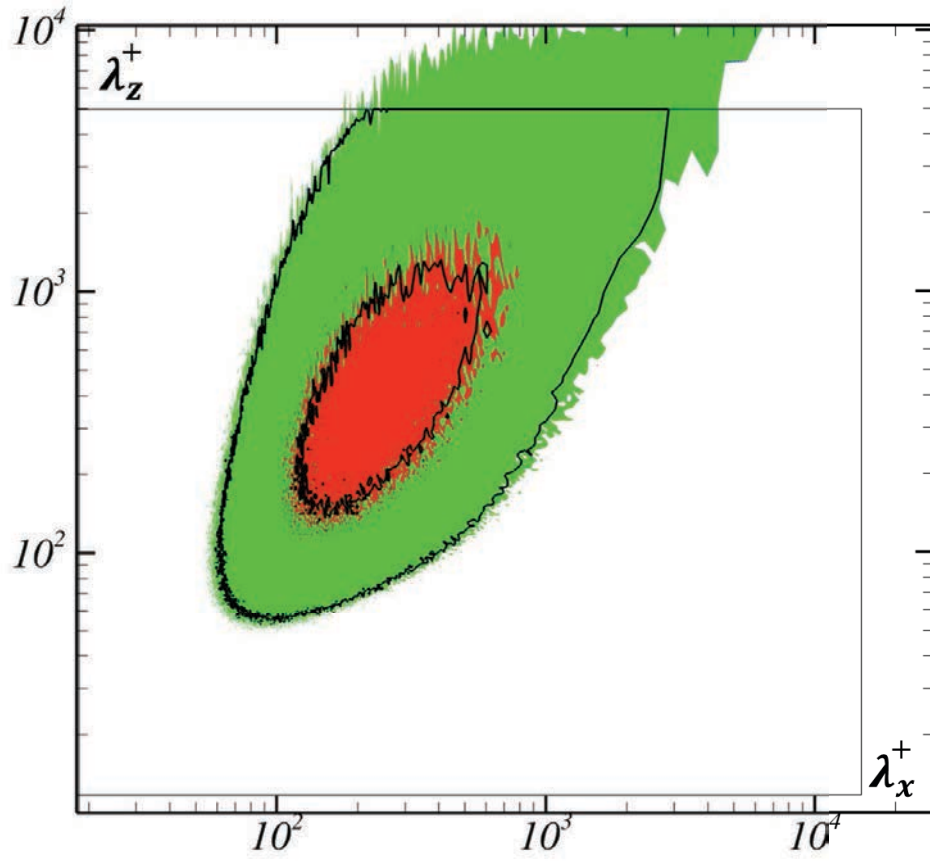
$$A_{\omega_y} = k_x k_z \frac{k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E_{\omega_y \omega_y}$$



**Figure 3** Premultiplied spectra densities of  $u$  (a) and of the first term at the right of the equation 9 (b) in inner variables versus the wavelength at  $y^+ = 12$ . The contours in color correspond to  $Re_\tau = 1100$  and in black lines to  $Re_\tau = 395$ . The inner rectangle in gray shows the computational domain of the  $Re_\tau = 395$  case. Are shown, two contours for each spectral density representing respectively 0.125 and 0.625 times the maximum at the highest Reynolds number as in Hoyas and Jiménez (2006).

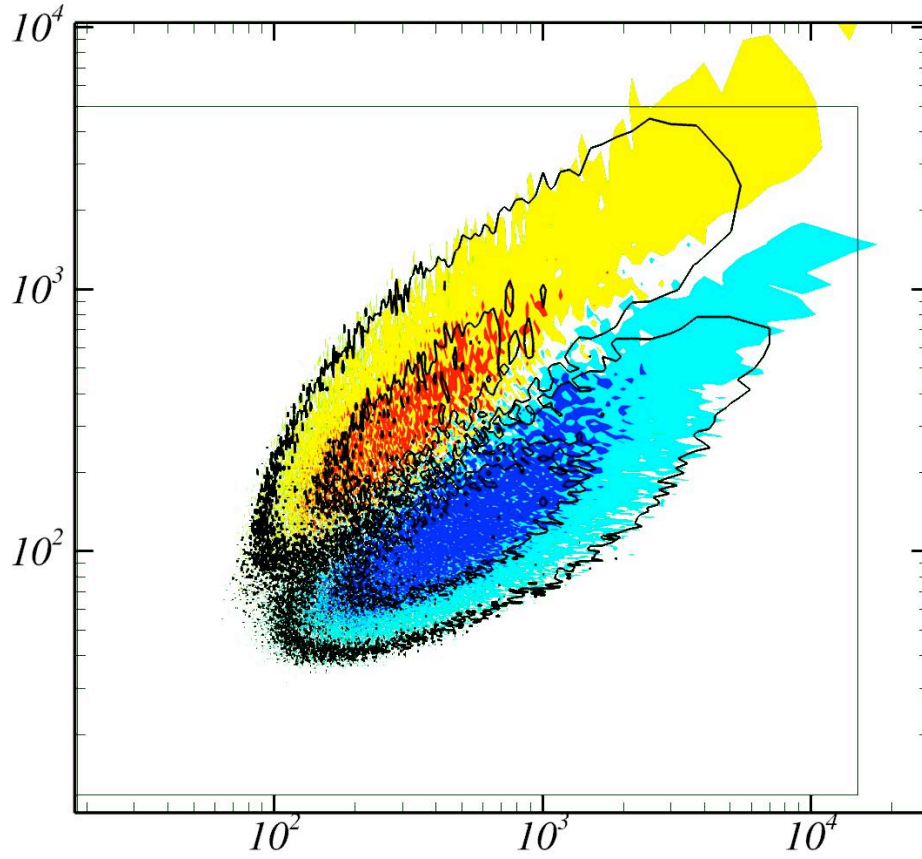
a)

$$k_x k_z \frac{k_x^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} E \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$



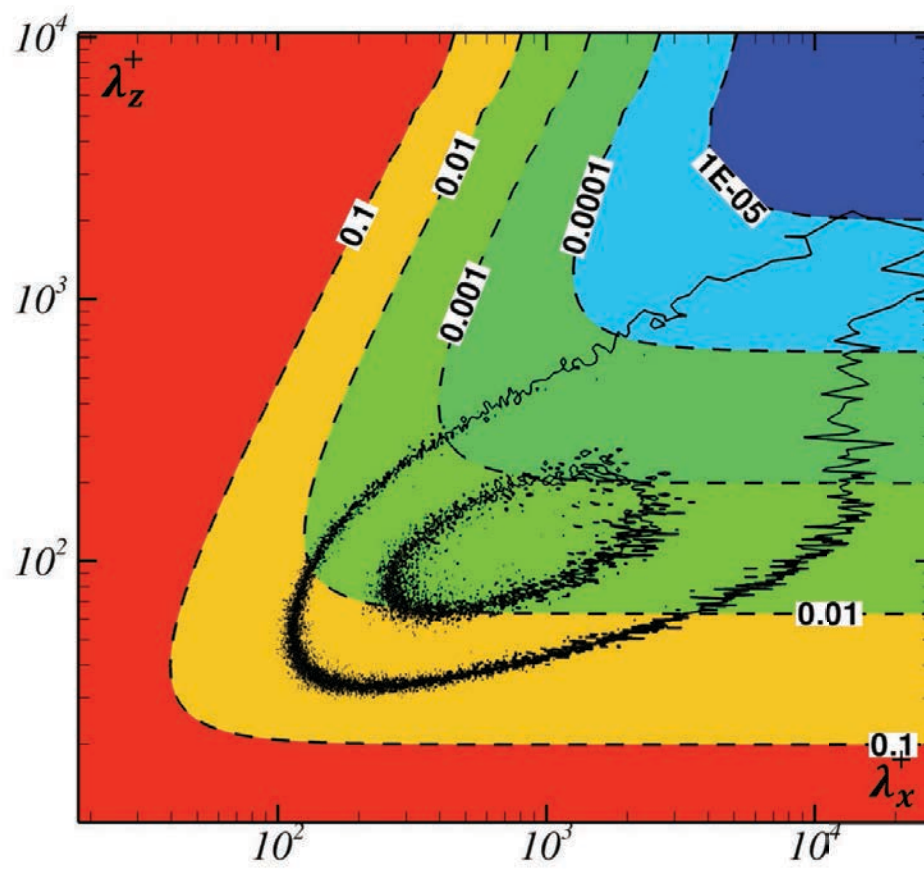
b)

$$-\frac{2k_x^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^2} \left\{ I_{\omega_y} I \frac{\partial v}{\partial y} + R_{\omega_y} R \frac{\partial v}{\partial y} \right\}$$

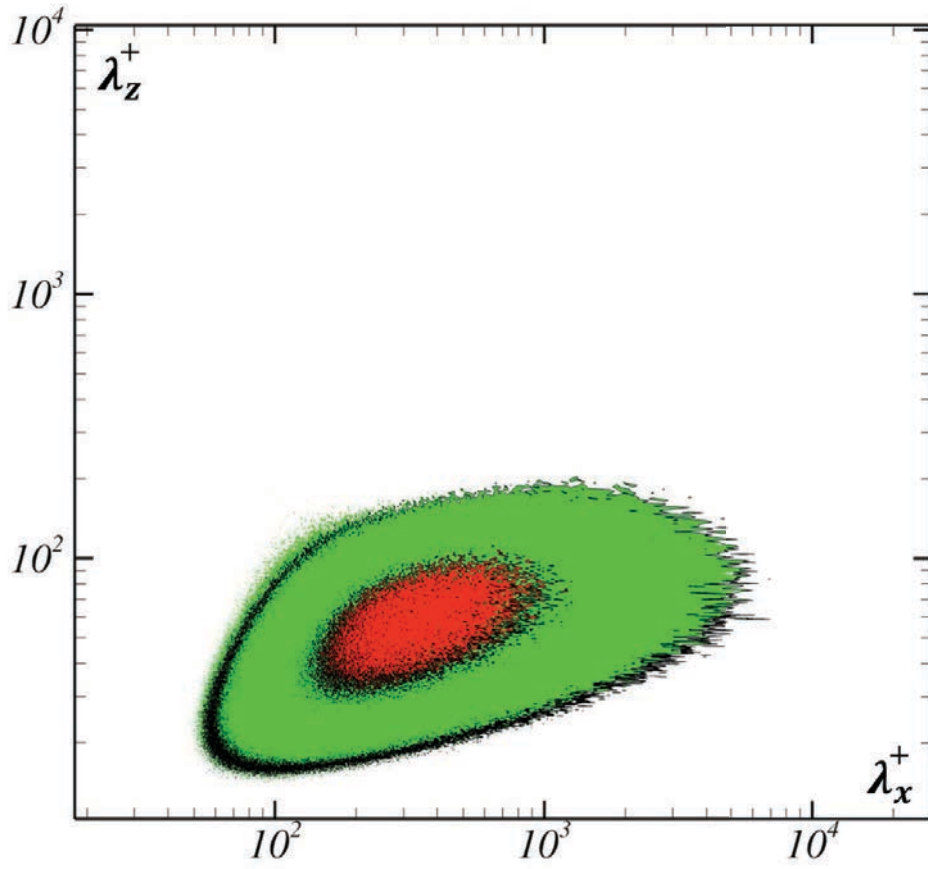


**Figure 4** Premultiplied spectral density of the last two terms of the equation (9). For legend see Fig. 3. In b, the upper yellow contours are positive and lower (blue) contours are negative. The maximum values in a and b are two order of magnitude smaller than those of Fig. 3.

a)



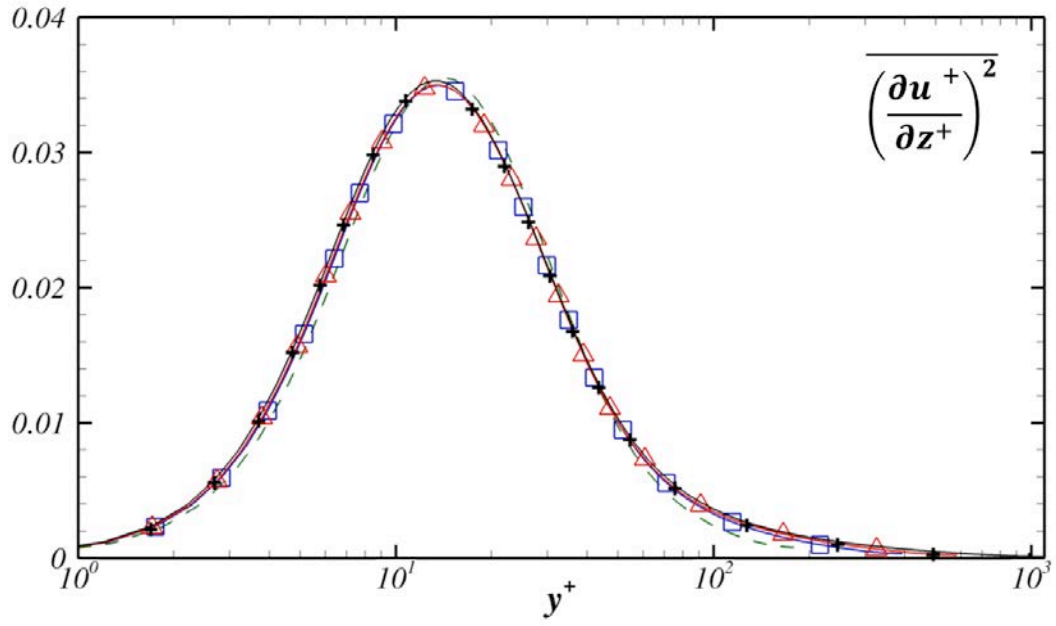
b)



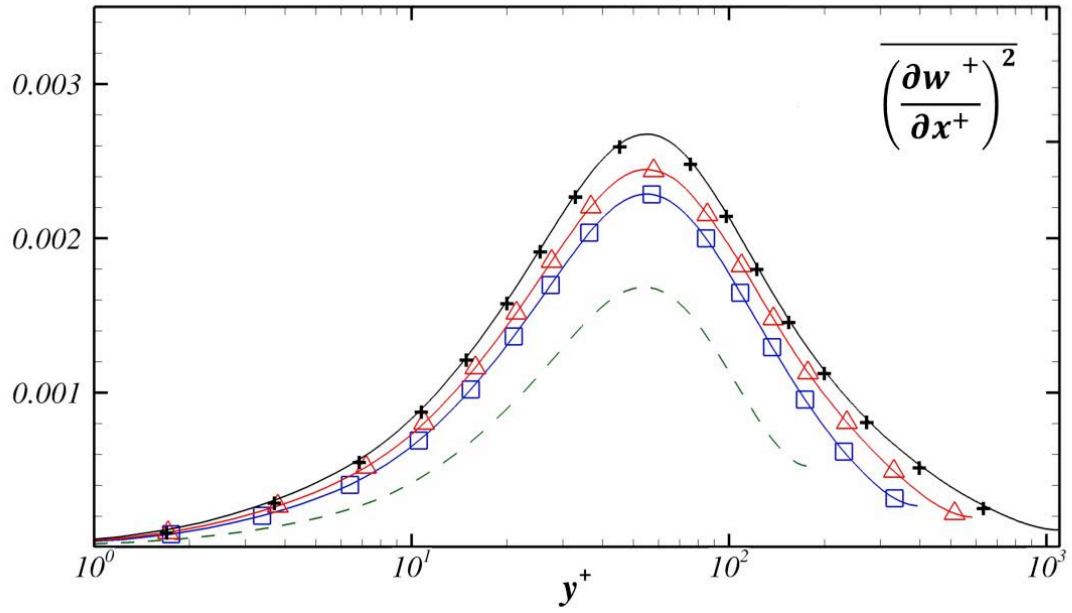
**Figure 5** a- Premultiplied spectra of  $u$  and contours of amplitude  $|H|^2$  of the filter given in (10);  $y^+ = 12$ ,  $Re_\tau = 1100$ ; b- Premultiplied spectra of  $\omega_y$  in black lines and estimated from the equation (10) in colors.



a)



b)



**Figure 6** Spanwise shear layer intensity of  $u$  (a), compared to the streamwise shear layer intensity of  $w$  (b).



## Résumé

### Transport et production dans les écoulements turbulents à des nombres de Reynolds modérés.

L'approche de simulation numérique directe est utilisée pour la simulation d'un écoulement en canal pleinement turbulent afin d'étudier l'influence des grandes échelles de l'écoulement ainsi que la dynamique du transport des contraintes de Reynolds et de la vorticité. Les simulations sont réalisées sur un domaine de calcul de grande taille afin de pouvoir capturer l'intégralité des grandes structures de l'écoulement, et portent sur une gamme relativement étendue de nombres de Reynolds ( $Re_\tau = 180, 395, 590$  et  $1100$ ) allant des écoulements faiblement turbulents à des écoulements modérément turbulents. L'invariance remarquable des fluctuations de vorticité normale est expliquée à travers une analyse spectrale de la vorticité. L'étude des différents termes du transport de l'intensité turbulente de la vorticité révèle par ailleurs que le pic de production de la vorticité transverse est situé à proximité immédiate de la paroi et pourrait ouvrir la voie à des stratégies de réduction de la traînée basées sur la réduction de la vorticité transverse.

Le transport des contraintes de Reynolds dans la couche interne et dans la couche de recouvrement est également étudié. A proximité des parois, la dépendance des termes de transport avec le nombre de Reynolds dans les échelles internes montre que ces dernières ne suffisent pas à caractériser la dynamique des contraintes de Reynolds dans cette zone. Cette insuffisance des échelles internes nous a amenés à nous intéresser plus particulièrement au processus de production à travers les statistiques de la production conditionnées par le passage par niveau des fluctuations de la vitesse normale ou longitudinale. Cette étude nous a permis d'identifier les fluctuations qui contribuent le plus à la production et celles qui sont à l'origine de la dépendance avec le nombre de Reynolds.

**Mots clés :** simulation numérique directe, schémas compacts et schémas explicites optimisés, écoulement en canal, contraintes de Reynolds, effets du nombre de Reynolds, transport turbulent

---

## Abstract

### Transport and production in turbulent flows at moderate Reynolds numbers

The direct numerical simulations of a fully turbulent channel flow are investigated to study the large scales effects on the flow quantities such as the Reynolds stresses and vorticity transport processes. Large computational domains are used so as to cover the largest scales of the flow. The simulations are performed in a wide range of Reynolds numbers ( $Re_\tau = 180, 395, 590$  and  $1100$ ) going from weakly to moderately high Reynolds number turbulent flows. The invariance of the wall-normal vorticity fluctuations scaled in wall variables in the inner layer versus the Reynolds number is analyzed using a spectral analysis. The vorticity transport equations are investigated in detail, presumably for the first time.

The transport mechanism of the Reynolds shear stresses are subsequently analyzed in the inner layer and the overlapping zone. In the wall layer, different terms of the Reynolds stresses transport expressed in inner scales depend on the Reynolds number. This scaling failure lead us to focus on the statistics of the production when the streamwise or normal velocity fluctuations cross a given level, through the conditional Palm statistics. The main aim is to identify those amplitudes of the fluctuations that contribute more to the production and those which are responsible for the production Reynolds dependence.

**Keywords :** direct numerical simulation, compact schemes and explicit optimized schemes, channel flow, Reynolds stresses, Reynolds number effects, turbulent transport